BACCALAURÉAT BLANC DU LYCÉE PRÉVERT.

SESSION DE JANVIER 2015

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES (8h – 12h)

COEFFICIENT : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

(Une seule calculatrice sur la table et changement uniquement en cas de panne de piles !)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Étude d'une famille de fonctions 6 points

A tout entier naturel n non nul on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{4\,e^{nx}}{e^{nx}+7}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=\dfrac{4\,e^{x}}{e^{x}+7}$

1. a) Démontrez que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

   b) Démontrez que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   c) Démontrez que pour tout réel x, $0<f_1(x)<4$.

2. a) Déterminez les coordonnées de I_1, intersection de la droite (d) d'équation $y=2$ et de la courbe C_1

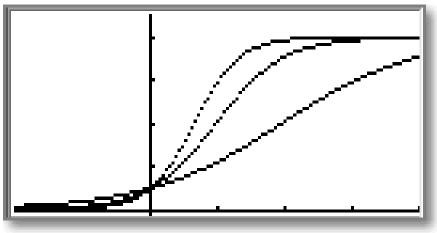
   b) Déterminez une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1

3. a) Montrez que pour tout réel $m\in]0;4[$, l'équation $f_1(x)=m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

On notera a cette solution.

   b) Déterminez l'expression exacte de a en fonction de m.

Partie B : Étude de certaines propriétés de f_n



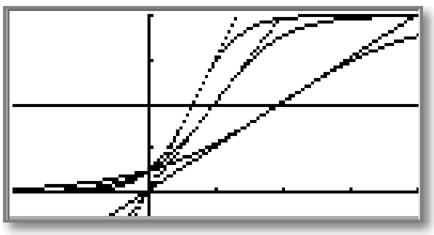
1. Matthieu ayant étudié f_1, et ayant affiché sur l'écran de sa calculatrice C_1, C_2 et C_3, voir ci-contre, fait les conjectures suivantes :

- Quelque soit n, entier naturel non nul, les courbes C_n admettent les mêmes asymptotes
- Ces courbes semblent toutes passer par le point $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.
- Les fonctions f_n semblent être strictement croissantes.

Validez les conjectures de Matthieu.

2. a) Montrez que pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y=2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera les coordonnées. On note I_n ce point.

   b) Déterminez une équation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n.



   c) Matthieu affiche les tangentes (T_1), (T_2) et (T_3) et constate que ces tangentes semblent concourir en un même point proche de l'origine O du repère.

Montrez que les tangentes (T_n) sont concourantes c'est à dire qu'elles se rencontrent toutes en un même point.

EXERCICE 2 Nombres complexes. Forme algébrique. 4 points

Les trois questions suivantes sont indépendantes

Question 1

Démontrer de deux façons différentes que, quelque soit le nombre complexe z, le nombre $(z-\mathbf{i})(\bar{z}+\mathbf{i})$ est un réel positif.

Question 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z)=z^2-\bar{z}$ où z est un nombre complexe de forme algébrique $z=x+\mathbf{i}\,y$, x et y étant deux réels.

a. Exprimer en fonction de x et de y la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=2$

Question 3

On considère l'équation (E) : $z^4=-4$ où z est un nombre complexe.

a. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

b. On considère le nombre complexe $z_0=1+\mathbf{i}$.

Montrer que z_0 est solution de l'équation (E) en calculant z_0^2 puis z_0^4.

c. Déduire des deux questions précédentes les trois autres solutions de l'équation (E). Justifiez.

EXERCICE 3 Étude d'une suite 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; +∞ [par $f(x)=5-\frac{4}{x+2}$

On a tracé en annexe dans un repère orthonormé la courbe C représentative de f ainsi que la droite D d'équation $y=x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle [0 ; +∞ [.

2. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle [0 ; +∞ [. On note α la solution.

On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

Sur la figure de annexe, en utilisant la courbe C et la droite D, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

(On laissera les traits de construction bien visibles sur le graphique)

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

4. a. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ où α est le réel défini dans la question 2.

b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+\cdots+u_n$.

a. Calculer S_0 , S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

b. Écrire un algorithme qui affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n entrée par l'utilisateur.

On utilisera une boucle **Tant que** ou une boucle **Pour**

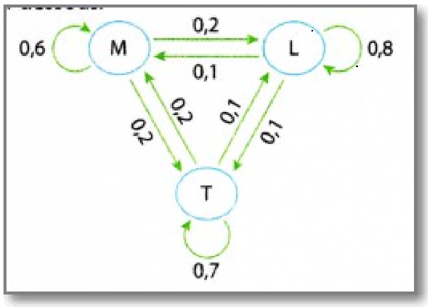
EXERCICE 4 Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité. 5 points

Partie A : Matrices

Une agence de location

On considère une agence de locations de voitures qui a trois succursales, une à Marseille (M), une à Toulouse (T) et une à Lyon (L).

La redistribution des voitures d'un début de mois au début du suivant est indiquée par le graphe ci-dessous.



1. Interpréter les flèches partant de M et les probabilités indiquées le long de ces flèches.

2. Écrire la matrice de transition A dont le coefficient $a_{i,j}$ est la probabilité de passer de l'état i à l'état j (L correspondant à l'état 1, M à l'état 2, T à l'état 3).

3. À un début de mois donné, noté mois 0, il y a 600, 500, 400 véhicules respectivement à L, M,T.

On représente cette répartition par une matrice ligne R = $(600 \quad 500 \quad 400)$.

a. Calculer RA. Que représente cette matrice ? Expliquer.

b. Calculer RA^2 . Quelle répartition peut-on prévoir au bout de deux mois ? de trois mois ?

Partie B : Arithmétique

On se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels **non nuls** vérifiant la relation (F) : $7^n - 3\times 2^m = 1$.

1. On suppose $m \leqslant 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant $m \geqslant 5$.

a. Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1$ (mod 32)

b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

c. En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1$ (mod 5).

d. La relation $7^n - 3\times 2^m = 1$ et le résultat $7^n \equiv 1$ (mod 5) sont-ils compatibles ?

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Annexe à compléter et à rendre avec la copie pour l'exercice 3

Nom et prénom : ....Classe TS ......