TS3 - LYCÉE PRÉVERT – DS 9 – mai 2013

Préparation au baccalauréat 2013

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES (13h25 – 17h25)

COEFFICIENT : 9

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

(Une seule calculatrice sur la table et changement uniquement en cas de panne de piles !)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 : Matrices 5 points

Les deux parties sont indépendantes

Partie A : ***Les deux questions sont indépendantes.***

1. Soit la matrice M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel donné.

a) Calculer M^2 et M^3 puis faire une conjecture sur l'expression de M^n , pour n entier naturel , $n \geqslant 1$

b) Prouver cette conjecture.

2. **Vrai ou Faux : Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier précisément.**

a. Si on peut calculer la matrice A + B alors on peut calculer la matrice AB

b. Pour toutes matrices carrées A et B de même ordre, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

c. Soient deux matrices carrées A et B , d'ordre 3 et inversibles, alors AB est aussi inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Partie B :

Adrien a trouvé dans son grenier un plan conduisant à un trésor. Il est écrit ceci :

> *« Plante un bâton A au pied du puits et un bâton B au pied du figuier, puis plante un bâton C au milieu du chemin reliant ces deux bâtons, puis un bâton D au milieu du chemin reliant B et C et ainsi de suite...Tu trouveras le trésor au bout de tes efforts. »*

Le figuier est à 200 mètres du puits et Adrien n'a pas envie de planter tous ces bâtons, mais il veut déterminer l'emplacement exact du trésor en réfléchissant. On va faire de même.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note u_n la distance du n-ième bâton planté au puits. Ainsi $u_1 = 0$ et $u_2 = 200$.

1. Compléter le schéma de la feuille annexe pour déterminer graphiquement la position du trésor.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n .

3.Pour tout $n \geqslant 1$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = A X_n$ où A est une matrice que l'on déterminera, puis exprimer X_n en fonction de A, de n et de X_1 .

4. a. Soit P = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer P^{-1} , puis $D = P^{-1}AP$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $A^n = P D^n P^{-1}$.

c. En déduire l'expression de X_n en fonction de n puis l'expression de u_n en fonction de n.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Conclure en donnant la valeur exacte de la position du trésor.

EXERCICE 2 : Géométrie dans l'espace 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les plans et droite suivants :
le plan (P_1) d'équation cartésienne : $-x+2y+3z-5=0$

le plan (P_2) d'équation cartésienne : $3x-6y-9z-12=0$

le plan (P_3) ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=1+2t-t' \\ y=-2+2t' \\ z=2+t+3t' \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, $t'\in\mathbb{R}$

la droite (D) définie par le système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-t \\ z=3+t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

Pour chaque question, déterminer la proposition exacte en justifiant.

Proposition	a	b	c
1. Position relative de (D) et (P_1)	(D) est incluse dans (P_1)	(D) est strictement parallèle à (P_1)	(D) est sécante à (P_1)
2. Position relative de (P_1) et (P_2)	(P_1) et (P_2) sont sécants	(P_1) et (P_2) sont strictement parallèles	(P_1) et (P_2) sont confondus
3. Le point d'intersection de la droite (D) et du plan (P_2) est	$M_1(35;-16;21)$	$M_2(2;-1;1)$	$M_3(19;-8;13)$
4. Le plan (P_3) contient le point	$N_1(1;2;-1)$	$N_2(2;0;6)$	$N_3(2;2;3)$
5. La droite perpendiculaire à (P_3) passant par le point $E(1;-2;2)$ a pour équations paramétriques	$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=2+t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$	$\begin{cases} x=1-t \\ y=-1+2t \\ z=2+3t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$	$\begin{cases} x=1-2t \\ y=-2-7t \\ z=2+4t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

EXERCICE 3 : Probabilités **4 points**

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

1 . On admet que l'on puisse assimiler la fonction « random » d'une calculatrice à une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0;1]$.
Soit p un nombre réel appartenant à $[0;1]$. Calculer $\mathbf{P}(\mathbf{random} \leqslant p)$

2. On considère l'algorithme ci-contre :

```
VARIABLES
  p EST_DU_TYPE NOMBRE        (p est un réel compris entre 0 et 1 ,
  X EST_DU_TYPE NOMBRE         X est un entier)
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  SI (random()<=p) ALORS
    DEBUT_SI
    X PREND_LA_VALEUR 1
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      X PREND_LA_VALEUR 0
      FIN_SINON
  AFFICHER X
FIN_ALGORITHME
```

Quelle est la loi de la variable aléatoire X simulée par cet algorithme ? Compléter le tableau suivant :

Valeurs possibles pour X , x_i	…………	…………
$p_i = \mathbf{P}(\mathbf{X} = x_i)$	……….	……………

3. Modifier l'algorithme pour qu'il affiche une valeur prise par une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres *n* et *p* qui seront entrés par l'utilisateur.
Complétez le tableau suivant qui décrit l'exécution pas à pas de l'algorithme dans un cas particulier où $n=7$, $p=0{,}3$ et où on suppose obtenues les 7 valeurs indiquées pour random() (arrondies à 10^{-4})

n	*p*	*k*	random()	X
7	0,3			0
		1	0,4352	
		2	0,1381	
		3	0,7830	
		4	0,5022	
		5	0,5800	
		6	0,3798	
		7	0,0933	

Partie B :

La durée de vie, en heures, des ampoules fluo-compactes est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle d'espérance 10000.

1. Donner la fonction densité de probabilité de cette variable aléatoire T.
2. Calculer $\mathbf{P}(\mathbf{T} \leqslant \mathbf{8000})$. Que signifie ce calcul ?
3. Sachant qu'une ampoule a déjà fonctionné pendant 7 000 h, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 12 000 h ?

EXERCICE 4 : Fonctions et calcul d'aires — 6 points

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x)=x\,\mathrm{e}^{1-x}$ et $g(x)=x^2\mathrm{e}^{1-x}$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ sont respectivement notées $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C'}$. Leur tracé est donné en annexe.

1. Étude des fonctions f et g

a. Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. On admettra que la fonction g a pour limite 0 en $+\infty$.

c. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.

2. Calcul d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par : $I_0=\int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,dx$ et, pour $n\geqslant 1$, $I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\,dx$.

a. Calculer la valeur exacte de I_0.

b. Déterminer pour $n\geqslant 0$, la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}$.

En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 0$: $I_{n+1}=-1+(n+1)I_n$.

c. En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.

3. Calcul d'une aire plane

a. Étudier la position relative des courbes $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C'}$.

b. On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C'}$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

En exprimant A comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité : $A=3-\mathrm{e}$.

4. Étude de l'égalité de deux aires

Soit a un réel strictement supérieur à 1.

On désigne par $S(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C'}$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=a$.

L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires A et $S(a)$ sont égales.

a. Montrer que $S(a)=3-\mathrm{e}^{1-a}(a^2+a+1)$ à l'aide des résultats donnés ci-dessous par un logiciel de calcul formel :

```
1 integrer(x*exp(1-x),x,1,a)
                                  -a*exp(-a+1)-exp(-a+1)+2
2 integrer(x^2*exp(1-x),x,1,a)
                    -a^2*exp(-a+1)-2*a*exp(-a+1)-2*exp(-a+1)+5
```

b. Démontrer que l'équation $S(a)=A$ est équivalente à l'équation : $\mathrm{e}^a=a^2+a+1$.

c. *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

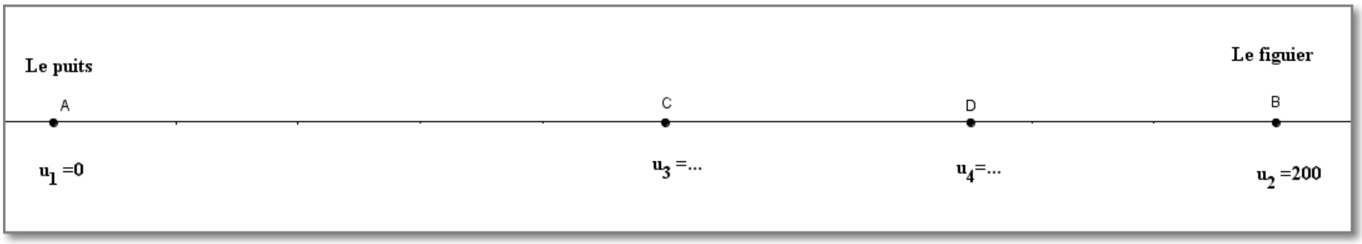
Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.

FEUILLE ANNEXE à rendre avec la copie

Nom et prénom : …...

Exercice 1 . Partie B. Figure 1

Poursuivre la construction pour déterminer graphiquement la position du trésor.



Exercice 4. Figure 2. :

Hachurer la zone ayant pour aire A et la zone ayant pour aire S(a)