BAC Blanc TS

MATHEMATIQUES

Série S

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.
(Une seule calculatrice sur la table et changement uniquement en cas de panne de piles !)

Questions de cours : (5 points)

1. Cette question revient sur la démonstration des deux valeurs limites de la fonction exponentielle.

On considère la fonction f définie par : $\boldsymbol{f(x)= e^x - x}$.

a) Montrer que la fonction f croissante sur $[0 ; +\infty[$.

b) En déduire que : si $\boldsymbol{x \geq 0}$ alors $\boldsymbol{e^x \geq x + 1}$.

c) En déduire la limite de la fonction exponentielle en $+ \infty$.

d) En posant $\boldsymbol{X = -x}$; montrer que l'on peut déduire de la limite précédente, le comportement de la fonction exponentielle en $- \infty$.

2. X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [1 ; 5]. On note F la fonction répartition définie par : $\forall x \in \mathbb{R} ; F(x) = P(X \leq x)$. Donner la représentation graphique de cette fonction.

3. Vrai ou Faux ?

a) Si $\boldsymbol{(u_n)}$ est une suite géométrique dont les termes sont strictement positifs **alors** la suite $\boldsymbol{(v_n)}$ définie par $\boldsymbol{v_n = \ln(u_n)}$ est une suite arithmétique.

b) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ **alors** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

c) Si $h(x) = \dfrac{-5}{x^2 - 1}$ **alors** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = +\infty$

Exercice 1 (5 points)

(u_n) est la suite de nombres réels définie par : $\boldsymbol{u_0 = 1}$, et, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2}$.

1. Calculer $\boldsymbol{u_1}$; $\boldsymbol{u_2}$ et $\boldsymbol{u_3}$.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel $\boldsymbol{n \geq 4}$, $\boldsymbol{u_n \geq 0}$.

b. En déduire que : pour tout entier naturel $\boldsymbol{n \geq 5}$, $\boldsymbol{u_n \geq n - 3}$.

c. En déduire la limite de la suite $\boldsymbol{(u_n)}$.

3. On définit la suite $\boldsymbol{(v_n)}$ en posant, pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$: $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$

a. Démontrer que la suite $\boldsymbol{(v_n)}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. En déduire que : pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$: $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$

c. Soit $\boldsymbol{S_n}$ la somme définie pour tout entier $\boldsymbol{n}$ par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer l'expression de S_n.

<u>Exercice 2 (4 points)</u>

Une urne contient 10 boules blanches et *n* boules rouges, *n* étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

1. Dans cette question, *n = 2.*

Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a. Donner les différentes valeurs prises par X.

b. Donner les probabilités correspondant aux valeurs prises par la variable X.

c. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

2. Dans cette question, on ne connaît pas le nombre *n*.

Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a. Démontrer que : $P(X=-1)=\dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

b. Calculer, en fonction de ***n*** la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.

c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut : $E(X)=\dfrac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$

d. Déterminer les valeurs de ***n*** pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

<u>Exercice 3 (6 points) :</u>

On considère la fonction *f* définie sur]0 ; +∞[par :

$$f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}.$$

On note ***Cf*** la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I - Étude des limites.

1. Déterminer la limite de la fonction *f* quand *x* tend vers 0.

2. Déterminer la limite de la fonction *f* quand *x* tend vers +∞.

3. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe *Cf* ?

<u>Exercice 3 (suite) :</u>

II - Étude des variations de la fonction.

1. Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction *f* s'exprime, pour tout réel *x* strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x+1)$$

2. Déterminer le signe de *f'(x)* et en déduire le tableau de variation sur]0 ;+∞[.

3. Démontrer que l'équation ***f(x)=2*** possède une unique solution notée **α** appartenant à] 0 ; +∞[et donner la valeur approchée de **α** arrondie au centième.

III – Algorithme et probabilité :

1. On considère l'algorithme suivant qui utilise la fonction ***f*** étudiée précédemment *:*

```
Variables
x est un nombre de [1 ; 2]
Y est un nombre
Début Algorithme
Lire x.
Début de Si  Sinon
Si f(x)>2 : Alors Y prend la valeur  x+0,001.
Sinon : Y prend la valeur  x-0,001
Fin de Si Sinon
 Afficher Y
Fin  Algorithme
```

a) Qu'affiche cet algorithme si on l'exécute pour *x* = 1,1 ?

b) Qu'affiche cet algorithme si on l'exécute pour *x* = 1,2 ?

c) Jean veut utiliser cet algorithme pour approcher le nombre **α** de la partie **II**.

Comment doit-il procéder ? Expliquer

(*Toute réponse explicitant un procédé sera prise en compte.)*

2. Jean choisit au hasard un nombre *x* de l'intervalle [1 ; 2]. En exploitant la loi uniforme, quelle est la probabilité que le nombre ***x*** soit dans **[*α -0,01* ; *α* + 0,01]** ? **α** étant le nombre de la partie **II .** Expliquer.

<u>Quelques éléments d'un corrigé :</u>

<u>Questions de cours :</u>

1. La dérivée de la fonction *f* définie par : *$f(x)=e^x-x$* a pour expression : *$f'(x)=e^x-1$*

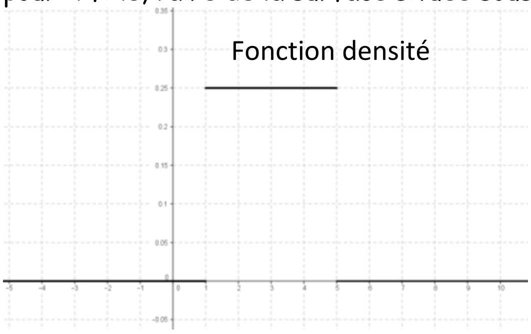
Pour $x \geq 0$, $e^x \geq e^0 = 1$ (exp est croissante) donc $e^x - 1 \geq 0$ et *f* croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

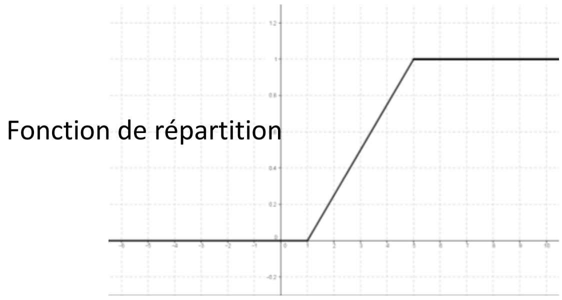
Comme en 0 elle vaut 1 et qu'elle ne fait que croitre, pour *$x \geq 0$* alors *$e^x - x \geq 1$* et *$e^x \geq x+1$.*

Par conséquent, la fonction exponentielle est supérieure à la fonction affine $x \to x+1$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, d'après le théorème de comparaison : la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$ est $+\infty$.

En posant ***$X = -x$*** , on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{e^X}$. On peut exploiter la précédente limite pour démontrer que la fonction exponentielle tend vers 0 en $-\infty$.

2. X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [1 ; 5]. On note F la fonction répartition nous donne pour x fixé, l'aire de la surface située sous la courbe de la fonction densité entre $-\infty$ et x.





3. a) VRAI ! Si *(u_n)* est une suite géométrique dont les termes sont strictement positifs alors on a la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n.q$ où q est la raison qui devient en prenant *ln :*
$ln(u_{n+1})=ln(u_n.q)=ln(u_n) + ln(q)$ donc la suite *(v_n)* va posséder la relation de récurrence suivante : $v_{n+1}= v_n + \ln(q)$ qui définit une suite arithmétique.
b) FAUX ! Contre-exemple : $f(x)=x^2$ et $g(x) = x$.
c) VRAI ! x^2-1 est un trinôme qui est négatif à l'intérieur de ses deux racines -1 et 1 donc quand x tend vers 1 en restant à gauche, x^2-1 tend vers 0 en restant négatif et son inverse tend vers $-\infty$. La multiplication par -5 nous donne bien $+\infty$.

<u>Exercice 1</u>

1. $\boldsymbol{u_1=-5/3}$; $\boldsymbol{u_2 = -14/9}$ et $\boldsymbol{u_3 = -14/27}$.

2. **a**. Par récurrence : on vérifie pour *$n=4$* puis on suppose vraie pour n. *Pour $n \geq 4$, $n-2>0$ donc si $u_n \geq 0$ alors $(1/3)u_n + n - 2 \geq 0$* et par conséquent $u_{n+1} \geq 0$. <u>Conclusion</u> : ***Vraie pour n=4 et héréditaire donc vraie pour n≥4.***

b. On sait que si $n \geq 4$ alors $u_n \geq 0$ donc en remplaçant n par n-1, cette propriété devient : si $n-1 \geq 4$ alors $u_{n-1} \geq 0$ soit : si $n \geq 5$ alors $u_{n-1} \geq 0$ donc $(1/3)u_{n-1} + n-1 -2 \geq n-3$ d'où $u_n \geq n-3$.

c. La suite (u_n) reste supérieure à la suite des termes « n-3 » qui diverge vers $+\infty$ donc d'après le théorème de comparaison (u_n) aussi. Sa limite est $+\infty$.

3. Si $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$ *alors* $v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3n - \frac{21}{2} = -2(\frac{1}{3}u_n = n-2) + 3n - \frac{21}{2} = \frac{1}{3}v_n$ donc la suite ***(v_n)*** est une suite géométrique de raison 1/3 et de premier terme *$v_0 = -25/2$* . On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N};\quad v_n = v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad et \quad u_n = -\frac{1}{2}\left(v_n - 3n + \frac{21}{4}\right) \quad donc \quad u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3k}{2} - \frac{21}{4}\right) = \frac{25}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n}\frac{21}{4} = \frac{25}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\,\frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) = \frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n^2-18n-21}{4}$$

Exercice 2

1. Une urne contient 10 boules blanches et *2* boules rouges. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros. Il joue deux fois sans remise.

X	-6	-1	4	total
P(X)	2/132	2x20/132	90/132	1

E(X) = (-6)x(2/132)+(-1)x(40/132)+4x(90/132)=308/132≈2,33€

2. Une urne contient 10 boules blanches et *n* boules rouges. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros. Il joue deux fois sans remise.

X	-6	-1	4	total
P(X)	n(n-1)/(10+n)(9+n)	2x10n/(10+n)(9+n)	90/(10+n)(9+n)	1

$P(X=-1)=\dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$ et $E(X)=\dfrac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$

$E(X)=\dfrac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}>0 \Leftrightarrow -6n^2-14n+360>0 \Leftrightarrow n\in]-9;\dfrac{20}{3}[$. ***Nbre de boules rouges≤6.***

Exercice 3 : On considère la fonction *f* définie sur]0 ; +∞[par : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

I - 1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(\dfrac{1}{x^2})=+\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}})=+\infty$. 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{x^2})=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}})=0$

La courbe *Cf* admet deux asymptotes d'équations x=0 et y = 0.

II - $f'(x)=-\dfrac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$. x^4 et $e^{(1/x)}$ sont des quantités strictement positives pour x>0 donc le signe de f'(x) est celui de l'opposé de celui de la fonction affine croissante x→2x+1 qui s'annule en -0.5 donc négatif pour x>0.

x	*0*	*+∞*
Signe de f'(x)	-	
Variation de f	+∞ ↘	*0*

3. La fonction f est continue et strictement décroissante sur]0 ;+∞[, la valeur limite à droite en 0 étant +∞ et celle en +∞ étant 0 ; 2 est une valeur intermédiaire donc d'après le théorème, l'équation ***f(x)=2*** possède une unique solution dans] 0 ; +∞[et **1,109<α<1,110** donc **α ≈1,11**.

III . a) Pour *x* = 1,1 ; l'algorithme affiche **1,101**. b) pour *x* = 1,2 , il affiche **1,199** !

c) Jean peut utiliser cet algorithme en redonnant en entrée la valeur de sortie pour effectuer une boucle.

- pour 1,1 : l'algorithme fonctionne successivement pour atteindre pas à pas 1,109 puis il tourne en rond en donnant 1,110 et 1.109.
- pour 1,2 : l'algorithme doit fonctionner pour atteindre pas à pas 1,110 puis il tourne en rond en donnant 1,110 et 1,109.

Quelle que soit la valeur donnée au début, il permet d'obtenir l'encadrement : **1,109<α<1,110**

2. En choisissant au hasard un nombre *x* de l'intervalle [1 ; 2]. La probabilité que le nombre ***x*** soit dans l'intervalle I= **[*α -0,01* ; *α* + 0,01]** est donnée par : P(X∈I)= ***α*** **+ 0,01-(*α* - 0,01) =0,02.**