

Partie A : Matrices

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel donné.

- Calculer M^2 et M^3 puis faire une conjecture sur l'expression de M^n , pour n entier naturel, $n \geq 1$
- Prouver cette conjecture.

2. Vrai ou Faux : Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier précisément.

- Si on peut calculer la matrice $A + B$ alors on peut calculer la matrice AB
- Soient deux matrices carrées A et B , de même taille, inversibles, alors AB est aussi inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Partie B : Arithmétique

Le but de cette partie est de répondre à la question :

« Est-il possible de trouver a et n tels que $a^2 + 9 = 3^n$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 et a un entier naturel non nul ? »

- Montrez que si $n \geq 3$, 3^n est congru à 1 ou 3 modulo 4.
- Montrez que si a est une solution, a est pair et déduisez-en que nécessairement n est pair.
- On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geq 2$.

Déduisez d'une factorisation de $3^{2p} - a^2$ que la réponse à la question posée est « non ».