

Le plus grand soin doit être apporté à la rédaction et aux calculs.  
Veillez à la lisibilité de votre travail. Soulignez vos résultats.

**Exercice 1 : ( 7 pts).**

A) Étudier les limites suivantes :

a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 8}{2n^2 + 5}$

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 - (-1)^n}{n^2 + 1}$

B) Vrai ou Faux à justifier :

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ . Cette suite a pour limite 3.

C) Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ .

Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence que cette suite est minorée par 0, majorée par 2, et est croissante.

D) Démonstration de cours

Démontrer que si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites telles que :  $\begin{cases} u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{cases}$

alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

**Exercice 2 : ( 5 pts).**

Une grande marque de cosmétiques fabrique et commercialise des parfums haut de gamme.

Il existe, sur le marché, des contrefaçons de ces parfums. Un parfum contrefait est une copie du parfum original, il est en général de moindre qualité mais beaucoup moins cher.

On note  $p$  la proportion de flacons de parfum contrefaits sur le marché des parfums en France.

**Partie A**

On suppose dans cette partie que  $p = 1\%$

Pour éliminer ces contrefaçons, la marque a mis au point un test optique permettant, sans rompre le ruban de garantie, de se faire une opinion concernant la conformité d'un parfum. On dit que le test est positif lorsqu'il indique que le flacon contient un parfum contrefait.

Les caractéristiques de ce test sont les suivantes :

- La probabilité que le test soit positif sachant que le parfum est une contrefaçon, est égale à 0,99
- La probabilité que le test soit négatif sachant que le parfum est authentique, est égale à 0,98

On notera  $C$  : l'événement « le parfum est contrefait » ;

$T$  : l'événement « le test est positif ».

On prend un flacon au hasard et on le soumet au test.

1. Construire un arbre pondéré traduisant les informations de l'énoncé.

2. On appelle valeur diagnostique du test la probabilité que le parfum soit contrefait sachant que le test est positif. Déterminer la valeur diagnostique de ce test. Qu'en pensez-vous ?

**Partie B**

Déterminer la valeur minimale de  $p$  pour que la valeur diagnostique du test dépasse 90 %

**Exercice 3 : ( 8 pts).**

Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

**Partie 1 : Sens de variation de la suite  $(u_n)$** 

- Montrer que  $u_1 = \frac{7}{3}$ , puis calculer de même  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ . On en donnera des valeurs approchées à  $10^{-2}$  près.
- Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3 - u_n)$ .
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq n+3$ .
- En déduire une validation de la conjecture faite à la question b.

**Partie 2 : Expression explicite de  $u_n$  et limite de  $u_n$** 

On désigne par  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - n$ .

- Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$ .
- En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ .
- Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Partie 3: Algorithme et somme des premiers termes de la suite  $(u_n)$** 

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ , autrement dit  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

- Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche  $S_n$  lorsque l'utilisateur saisit  $n$ .

<b>Entrée :</b>	Saisir N
<b>Initialisation :</b>	Affecter à la variable $S$ la valeur ...
<b>Traitement :</b>	Pour K allant de 1 à N, la variable $S$ prend la valeur $S + \dots$
	Fin Pour
<b>Sortie :</b>	Afficher $S$

Vérifier le fonctionnement de votre algorithme à la main ou avec la calculatrice en calculant  $S_4$ .

- En utilisant l'expression explicite de  $u_n$ , exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ , ( $\odot$  sans symbole  $\sum$  ni  $\dots + \dots$ )