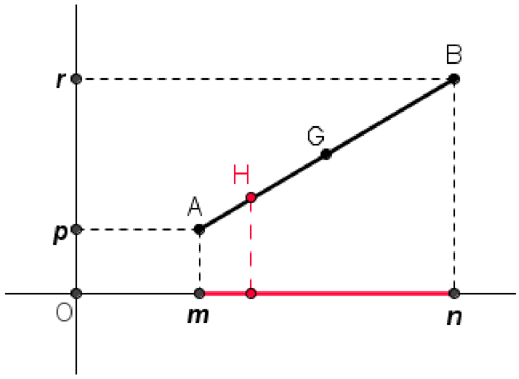
Corrigé du devoir commun n°1 de Mathématiques pour les SECONDES

EXERCICE 1 : (4 points) Restitution organisée de connaissances

a) Dans le repère ci-contre, on donne A(m ; p) et B(n ; r).
Exprimez en fonction de m , n , p et r les coordonnées du milieu G de [AB]



D'après le cours : G $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

donc ici G $\left(\frac{m+n}{2};\frac{p+r}{2}\right)$

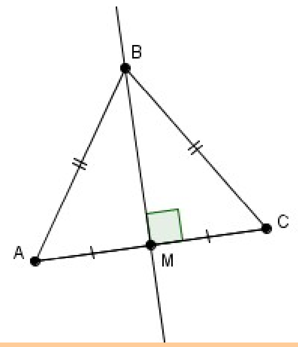
b) H est un point de [AB]. Comment s'écrit l'intervalle des valeurs que peut prendre l'abscisse de H ?

Il s'agit de l'intervalle [*m* , *n*]

EXERCICE 2 : (10 points) Vrai - Faux

Préciser pour chaque affirmation suivante si elle est **vraie ou fausse**. **On justifiera soigneusement**.

1) Si AB = BC alors B est le milieu de [AC].



Cette affirmation est fausse comme l'illustre le dessin ci-contre.

En effet « AB = BC » équivaut à « B appartient à la médiatrice de [AC] »

Remarque : Par contre la réciproque de cette proposition est vraie :

Si B est le milieu de [AC] alors AB = BC

2) Si $AB=\sqrt{8}$, $BC=2\sqrt{2}$ et AC = 4 alors le périmètre du triangle ABC est égal à $4(1+\sqrt{2})$

Nommons *p* ce périmètre : *p* = AB + BC + AC . Calculons *p*.

$p=\sqrt{8}+2\sqrt{2}+4=\sqrt{4\times2}+2\sqrt{2}+4 = \sqrt{4}\times\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4 = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4 = 4\sqrt{2}+4 = 4(\sqrt{2}+1)$.

La proposition est bien vraie

3) Si f est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=3x-2$ alors $f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$

Calculons l'image de $\frac{1}{3}$ **:** $f\left(\frac{1}{3}\right)=3\times\frac{1}{3}-2 = \frac{3}{3}-2=1-2 = -1$**. La proposition est vraie.**

4) Si g est la fonction définie sur ℝ par $g(x)=x^2-1$, et C_g sa courbe représentative alors :

a) un antécédent de 0 est – 1

$g(-1)=(-1)^2-1=1-1=0$ **donc un antécédent de 0 est – 1 . La proposition est vraie**

b) $B(-3;8)\in C_g$. **B appartient à C_g si son abscisse – 3 appartient à l'ensemble de définition de la fonction et si son ordonnée 8 est l'image de son abscisse – 3 par la fonction g .**

$-3\in\mathbb{R}$ **et** $g(-3)=(-3)^2-1=9-1=8$ **donc B appartient bien à C_g, la proposition est vraie**

5) Soit la fonction définie par $h: x\longmapsto \dfrac{x+5}{x-2}$ alors :

a) $h(2)$ n'existe pas

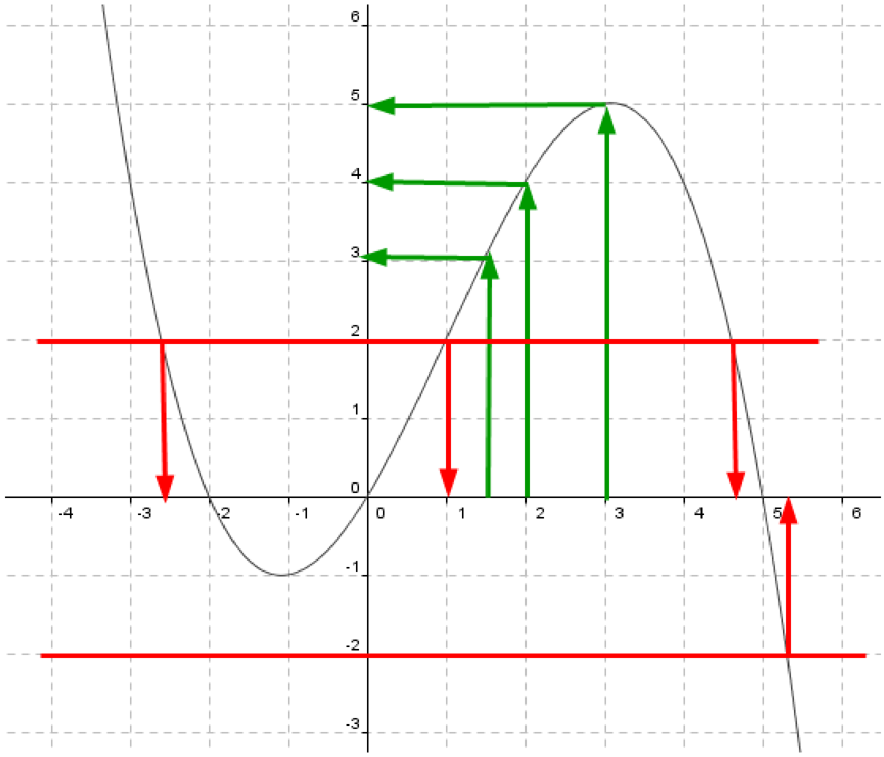
Essayons de calculer *h* (2) : $h(2)=\dfrac{2+5}{2-2}=\dfrac{7}{0}$ **, nous aboutissons à un calcul impossible : il est vrai que *h* (2) n'existe pas.**

b) 0 n'a pas d'image par *h*

Essayons de calculer *h* (0) : $h(0)=\dfrac{0+5}{0-2}=\dfrac{5}{-2}$ **, *h*(0)=– 2,5 : la proposition est fausse à moins que *h* ait un ensemble de définition restreint qui exclu 0, par exemple « *h* définie sur [3 ; 10] »mais cela n'est pas précisé dans l'énoncé.**

EXERCICE 3 : (5 points)

Voici la représentation graphique d'une fonction f.
Conjecturez en lisant sur le graphique



Lectures d'images avec les flèches vertes,

a) l'image de 3 par f. $f(3)=5$

Il semble que l'image de 3 soit 5.

b) l'image de 1,5 par f

Il semble que l'image de 1,5 soit environ 3.

c) $f(2)$

Il semble que l'image de 2 soit 4.

Lectures d'antécédents avec les flèches rouges

d) le ou les antécédents de 2

Les antécédents de 2 sont , environ – 2,6 ; 1 et environ 4,6.

e) le ou les solutions de l'équation $f(x)=-2$

Cette équation semble n'avoir qu'une solution , environ 5,3

EXERCICE 4 : (6 points)

Voici le programme de calcul suivant :

- Entrer un nombre réel compris entre – 4 et 5
- Le multiplier par – 2
- Ajouter 5
- Diviser le résultat par 3
- Afficher le résultat

1) On entre le nombre 1 , quel résultat obtient-on ?

Voici les étapes pour 1 : 1 ⟶ **– 2** ⟶ **– 2 + 5 = 3** ⟶ $\frac{3}{3}$ **= 1**

On obtient 1 quand on entre 1.

2) On veut obtenir 2, quel nombre faut-il entrer ?

Plusieurs méthodes sont possibles , on peut par exemple « remonter » le programme à l'envers .

2 ⟶ $\mathbf{2\times3=6}$ ⟶ **6 – 5 = 1** ⟶ $\frac{1}{-2}$ **= – 0,5**

Mais on peut aussi anticiper la question suivante, en écrivant l'expression algébrique du résultat si *x* est le nombre de départ :

x ⟶ $-2x$ ⟶ $-2x+5$ ⟶ $\dfrac{-2x+5}{3}$

On résout ensuite l'équation $\frac{-2x+5}{3}=2$

$\frac{-2x+5}{3}=2$ **équivaut à** $-2x+5=2\times3$ **équivaut à** $-2x=6-5$ **équivaut à** $x=\frac{1}{-2}=-0{,}5$ **.**

Donc si l'on veut obtenir 2 , il faut entrer – 0,5 (qui est bien compris entre – 4 et 5 comme l'indique la consigne).

3) Ce programme définit une fonction *f*.

a) Donner son ensemble de définition et son expression algébrique.

La variable *x* est le nombre choisi entre – 4 et 5 donc l'ensemble de définition de *f* est l'intervalle [– 4 ; 5] .

L'image de *x* est le résultat obtenu en fin de programme. Son expression algébrique que l'on nomme

$f(x)$ **a été obtenue dans la question précédente :** $f(x)=\frac{-2x+5}{3}$

b) Calculer l'image de – 1 : $f(-1)=\frac{-2\times(-1)+5}{3}=\frac{7}{3}$

c) 15 a-t-il un antécédent par cette fonction ? Justifier soigneusement.

On résout l'équation $f(x)=15$ c'est à dire $\frac{-2x+5}{3}=15$

$\frac{-2x+5}{3}=15$ **équivaut à** $-2x+5=15\times3$ **équivaut à** $-2x=45-5$ **équivaut à** $x=\frac{40}{-2}=-20$ **.**

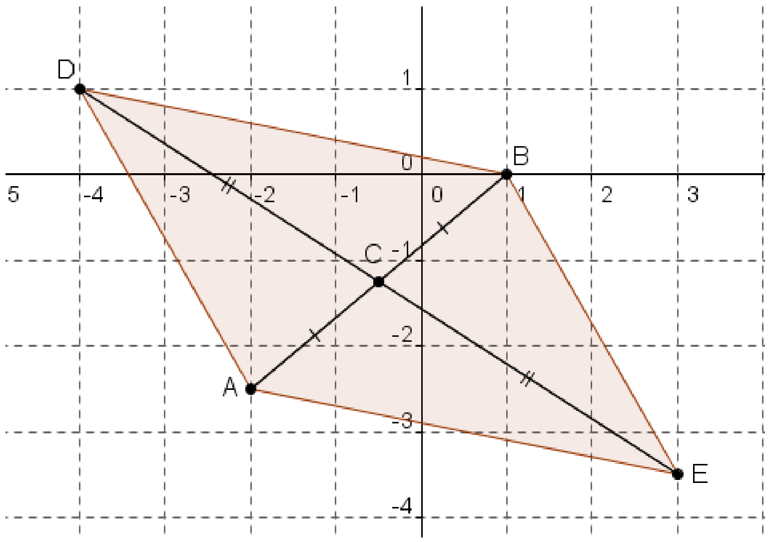
Or – 20 n'appartient pas à l'intervalle [– 4 ; 5] donc 15 n'a pas d'antécédents par *f* .

EXERCICE 5 : (5 points)

Dans le repère ci-contre

1) Placer les points $A(-2;-2{,}5)$, $B(1;0)$ et $D(-4;1)$

2) Calculer les coordonnées du milieu C de [AB]



C $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

C $\left(\frac{-2+1}{2};\frac{-2{,}5+0}{2}\right)$ **donc C** $\left(\frac{-1}{2};\frac{-2{,}5}{2}\right)$

C(–0,5 ; –1,25) (cohérent avec le graphique)

3)a) Construire le symétrique de D par rapport à C. On le nommera E. **voir graphique**

b) Calculer les coordonnées de E

E est le symétrique de D par rapport à C donc C est le milieu de [DE] donc

$x_C = \frac{x_D + x_E}{2}$ et $y_C = \frac{y_D + y_E}{2}$ d'où, en remplaçant par les valeurs connues :

$-0{,}5 = \frac{-4 + x_E}{2}$ et $-1{,}25 = \frac{1 + y_E}{2}$

donc $-4 + x_E = -1$ et $1 + y_E = -2{,}5$ d'où $x_E = -1 + 4 = 3$ et $y_E = -2{,}5 - 1 = -3{,}5$

Le point E a pour couple de coordonnées (3 ; – 3,5). (cohérent avec le graphique)

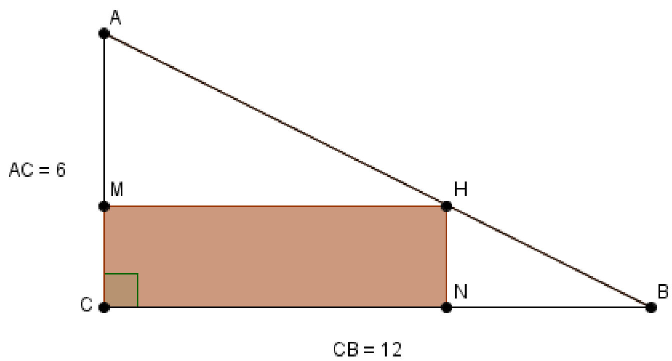
4) En utilisant les questions précédentes , donner la nature du quadrilatère AEBD (on attend une justification bien rédigée)

Le quadrilatère AEBD est un parallélogramme.

En effet, C est le milieu de [AB] par construction, C est aussi le milieu de [DE] par définition de la symétrie centrale.

Les diagonales du quadrilatère AEBD, [AB] et [DE] se coupent en leur milieu C. AEBD est donc un parallélogramme.

EXERCICE 6 : (10 points)



ABC est un triangle rectangle en C tel que AC = 6 cm et BC = 12 cm.
M est un point variable du segment [AC]. La perpendiculaire à (AC) passant par M coupe le côté [AB] en H. La perpendiculaire à (BC) passant par H coupe le côté [BC] en N.
On obtient un rectangle CMHN.

***Problème : On veut déterminer la ou les positions du point* M *telle(s) que l'aire du rectangle* CMHN *soit égale aux trois huitièmes de l'aire du triangle* ABC.**
On pose AM = x.
Première étape : Calcul de l'aire du rectangle CMHN en fonction de x.

a) Donner sous forme d'un intervalle l'ensemble des valeurs possibles de x.

AC = 6 *et* M *peut se déplacer depuis A jusqu'en C donc* $x \in [0 ; 6]$.

b) Donner en fonction de x la longueur CM.

$\mathrm{CM} = \mathrm{AC} - \mathrm{AM} = 6 - x$

c) En utilisant le théorème de Thalès, justifier l'égalité : $\frac{\mathrm{MH}}{12} = \frac{x}{6}$. En déduire l'expression de CN en fonction de x.

Par construction (MH) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès appliqué au triangle ABC : (MH)//(BC) implique $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{BC}}$ .Ainsi :

$\frac{x}{6} = \frac{MH}{12}$ **d'où** $MH = \frac{12 \times x}{6}$ **.** $MH = 2x$ **.**

Or CMHN est un rectangle donc CN=MH, on a donc: $\mathrm{CN} = 2x$

d) Montrer que l'aire du rectangle CMHN est égale à $12x - 2x^2$.

Aire CMHN = CM × CN donc Aire CMHN= $(6 - x) \times 2x = 12x - 2x^2$ **.**

Deuxième étape : Utilisation d'une fonction

On définit la fonction f sur [0 ;6] par $f(x) = 12x - 2x^2$.

a) Déterminer les antécédents de 0 par la méthode de votre choix (raisonnement géométrique et (ou) calculs)

Géométriquement :
On remarque que l'expression de $f(x)$ correspond à l'aire du rectangle CMHN.
Les antécédents de 0 sont les valeurs de *x* qui donnent un rectangle dont l'aire est nulle. Le rectangle est « aplati » lorsque M est en A ou en C donc lorsque *x* = 0 ou *x* = 6.
Par le calcul , on résout $f(x)=0$. On utilise la forme factorisée de l'aire : $f(x)=(6-x)\times 2x$
(Rappel : équation - produit étudiée en Troisième :** $A\times B=0$ équivaut à $A=0$ ou $B=0$ **)
$(6-x)\times 2x=0$ **équivaut donc à** $6-x=0$ **ou** $2x=0$ **donc *x* = 6 ou *x* = 0**

Les antécédents de 0 sont 0 et 6.

b) Justifier que le problème se traduit par l'équation $f(x)=13{,}5$.

***On cherche x tel que l'aire du rectangle* CMHN *soit égale aux trois huitièmes de l'aire du triangle* ABC.**

On calcule : $\frac{3}{8}\times \text{Aire ABC}=\frac{3}{8}\times\frac{6\times 12}{2}=\frac{27}{2}$ **=13,5. On cherche donc *x* tel que** $f(x)=13{,}5$

Le problème revient à « déterminer les antécédents de 13,5 par la fonction *f* ».

c) En utilisant un tableau de valeurs de *f* sur [0 ;6] , résoudre le problème.

Tableau de valeurs :

un pas de 1 n'est pas assez précis , on choisit un pas de 0,5

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$f(x)$	0	5,5	10	13,5	16	17,5	18	17,5	16	13,5	10	5,5	0

D'après ce tableau, les valeurs de *x* cherchées sont : 1,5 et 4,5. C'est-à-dire que il y a deux positions satisfaisantes pour M : **lorsque AM=1,5cm ou lorsque AM=4,5cm.**

Remarque : Le tableau de valeurs ne permet pas de prouver que ce sont les deux seules positions possibles .

Pour le prouver, il faut résoudre l'équation du second degré : $12x-2x^2=13{,}5$
Nous verrons cela plus tard ….
Mais la représentation graphique de la fonction semble confirmer aussi qu'il n'y a que deux valeurs possibles :