Lycée Jacques Prévert Année 2011-2012

Correction du devoir commun de 1ère S n°1 (2 heures)

Exercice 1 : (4 points)

1°) On considère le polynôme Pdéfinie par $P(x) = x^2 + 2x + 3$.
$\Delta = -8$. Donc $\Delta < 0$ donc $P(x)$est du signe de a (ici $a = 1$) pour tout x réel.
Donc $P(x) > 0$ pour tout x.
L'inéquation a donc une infinité de solution. L'affirmation est fausse.

2°) $-2(x-1)^2 - 4 = -2(x^2 - 2x + 1) - 4 = -2x^2 + 4x - 2 - 4 = -2x^2 + 4x - 6 = f(x)$donc Vrai

3°) Vecteur directeur de la droite (AB) : $\overrightarrow{AB}(5;-1)$
Vecteur directeur de la droite (d) : $\vec{u}(-b;a)$ avec $b = -1$et $a = 2$ car l'équation de (d) est de la forme $ax + by + c = 0$. Ainsi, $\vec{u}(1;2)$
On étudie la colinéarité des deux vecteurs directeurs : $5 \times 2 = 10$ et $1 \times (-1) = -1$
C'est différent donc $\overrightarrow{AB}$et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires et les droites ne sont pas parallèles. Donc Faux.

4°) Faux car $2x - y + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x - y = -5$. Avec $m = -5$ l'algorithme serait juste.

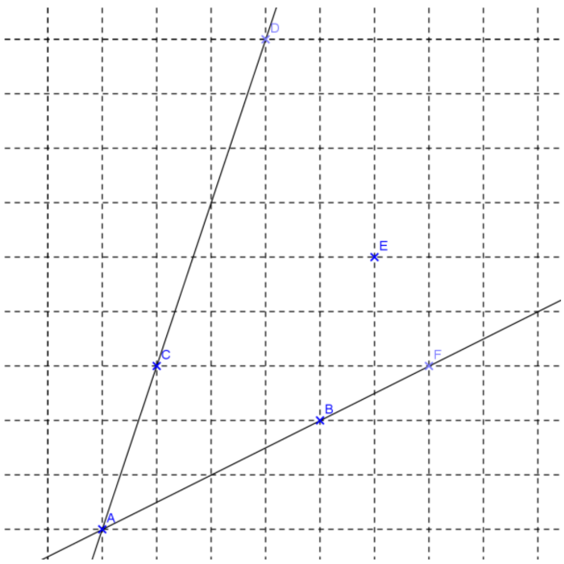
Exercice 2 : (3 points)

Entrée :
Saisir a,b,c,d, e et f

Traitement :
s prend la valeur c-a
t prend la valeur d-b
u prend la valeur e-a
v prend la valeur f-b
q prend la valeur $s \times v - t \times u$

Sortie :
Si $q = 0$ alors Afficher « les points sont alignés »
sinon Afficher « les points ne sont pas alignés »

Exercice 3 : (5 points)



2. On a : $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{BF}$ d'où $\overrightarrow{AF} = 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF})$ d'où $\overrightarrow{AF} - 3\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{BA}$ d'où $-2\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{BA}$ donc $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

Partie A : à l'aide d'égalités vectorielles

3. On a $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$
4. On a : $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
5. Ainsi : $\frac{3}{2}\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires, donc les points D, E et F sont alignés.

Partie B : à l'aide d'un repère

6. Dans ce repère: D(0 ;3) car $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$ et E(1 ;1) car $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. De plus $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, donc F($\frac{3}{2}$; 0)
7. Ainsi: $\overrightarrow{DE}\binom{1-0}{1-3}$ d'où $\overrightarrow{DE}\binom{1}{-2}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}-0\\0-3\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-3\end{pmatrix}$. Et $x_{\overrightarrow{DE}}y_{\overrightarrow{DF}} - y_{\overrightarrow{DE}}x_{\overrightarrow{DF}} = 1 \times (-3) - (-2) \times \frac{3}{2} = 0$.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires et donc que les points D, E et F sont alignés.

Exercice 4 : (5 points)

Partie A : position d'une courbe

- On a $f(0) = -\frac{5}{2}$. Donc le point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0; -\frac{5}{2})$

- De plus $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} = 0$. On calcule le discriminent de f : $\Delta = 9$. Comme le discriminent est positif, f admet 2 racines : $x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{9}}{2\times\frac{1}{2}} = -1$ et $x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{9}}{2\times\frac{1}{2}} = 5$.

  Donc la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (-1 ;0) et (5 ;0).
- Pour déterminer les coordonnées du sommet de la parabole $\mathcal{C}$, on a besoin de la forme canonique de *f*.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 4x - 5) = \frac{1}{2}[(x-2)^2 - 2^2 - 5] = \frac{1}{2}[(x-2)^2 - 9] = \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{9}{2}$$

  Donc le sommet de la parabole $\mathcal{C}$ a pour coordonnées : $(2\,; -\frac{9}{2})$.

Partie B : comparaison de deux fonctions

Pour comparer les fonctions *f* et h, on étudie le signe de leur différence.

Or on a : $f(x) - h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} - (2x - 5) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{5}{2}$.

On calcule le discriminent de $\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{5}{2}$: $\Delta = 11$. Comme il est positif, le polynôme a 2 racines :

$x_1 = \frac{-(-4)-\sqrt{11}}{2\times\frac{1}{2}} = 4 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \frac{-(-4)+\sqrt{11}}{2\times\frac{1}{2}} = 4 + \sqrt{11}$.

On a donc : $f(x) - h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \left(4 - \sqrt{11}\right)\right)\left(x - \left(4 + \sqrt{11}\right)\right)$. On a donc le tableau de signes suivant

x	-∞		$4-\sqrt{11}$		$4+\sqrt{11}$		+∞
Signe de $x - (4 - \sqrt{11})$		−	0	+		+	
Signe de $x - (4 + \sqrt{11})$		−		−	0	+	
Signe de $f(x) - h(x)$		+	0	−	0	+	

Donc $f(x) > h(x)$ pour $x \in]-\infty;\ 4-\sqrt{11}[\cup]4+\sqrt{11};\ +\infty[$;

$f(x) = h(x)$ pour $x \in \{\,4-\sqrt{11}\,;4+\sqrt{11}\,\}$

et $f(x) < h(x)$ pour $x \in]4-\sqrt{11}\,;\ 4+\sqrt{11}\,[$.

Partie C : intersection de deux courbes

Quelque soit le réel *m*, pour chercher les points d'intersection des courbes $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{C}$ on est amené à chercher les solutions de $f(x) = g_m(x)$, c'est-à-dire chercher les racines du polynôme : $f(x) - g_m(x)$.

Or quelque soit le réel *m*, on a : $f(x) - g_m(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2} - mx^2 = (\frac{1}{2} - m)x^2 - 2x - \frac{5}{2}$

- Si m=0,5alors $f(x) - g_m(x) = -2x - \frac{5}{2}$. Donc $f(x) - g_m(x) = 0$ admet une unique solution, donc les courbes $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{C}$ ont un seul point commun.
- Sinon, on calcule le discriminent de $f(x) - g_m(x)$: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times \left(\frac{1}{2} - m\right) \times \left(-\frac{5}{2}\right) = 9 - 10m$.

Le nombre de racines du polynôme $f(x) - g_m(x)$ dépend du signe de son discriminent. Or on a :

m	-∞		0,5		$\frac{9}{10}$		+∞
Signe de Δ		+	‖	+	0	−	

Ainsi pour *m* appartenant à]-∞ ; 0,5[U]0,5 ;$\frac{9}{10}$[, le discriminent est positif, donc le polynôme $f(x) - g_m(x)$ a deux racines différentes et donc les courbes $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{C}$ ont deux points communs.

Et pour *m* valant $\frac{9}{10}$ le discriminent est nul, donc le polynôme $f(x) - g_m(x)$ a une seule racine et donc les courbes $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{C}$ ont un seul point commun.

Enfin pour *m* appartenant à $]\,\frac{9}{10};\ +\infty[$, le discriminent est négatif, donc le polynôme $f(x) - g_m(x)$ n'a pas de racine et donc les courbes $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{C}$ n'ont aucun point commun.