Ex 1 :

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; −1 ; −2) et D (7 ; −1 ; 4).

1. Démontrons que les points A, B et C ne sont pas alignés.
On a $\overrightarrow{AB}\,(1;-1;-1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(2;-5;-3)$. On a : $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-1}{-5}$.
Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.

a. Démontrons que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u} = 1\times2+(-1)\times(-1)+(-1)\times3 = 0$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u} = 2\times2+(-5)\times(-1)+(-3)\times3 = 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{u}$.
La droite Δ est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : elle est orthogonale au plan (ABC)

b. De ce qui précède, on déduit que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à (ABC).
Une équation cartésienne de (ABC) est de la forme $2x-y+3z+d=0$.
Comme le point A appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient :
$2\times0+(4)\times(-1)+(1)\times3+d=0 \Leftrightarrow d=1$.
On en déduit une équation cartésienne du plan (ABC) : $2x-y+3z+1=0$.

c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ.
Comme la droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$ et contient le point D (7 ; −1 ; 4), une représentation paramétrique de Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

d. Déterminons les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
Les coordonnées de H sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \\ 2x-y+3z+1 &=& 0 \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \\ 2x-y+3z+1 &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \\ 2(2t+7)-(-t-1)+3(3t+4)z+1 &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t+7 \\ y &=& -t-1 \\ z &=& 3t+4 \\ t &=& -2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3 \\ y &=& 1 \\ z &=& -2 \\ t &=& -2 \end{array}\right.$$

Le point H a pour coordonnées $H(3;\ 1;\ -2)$

3. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation $x+y+z=0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a. Démontrons que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants.

Le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation $x+y+z=0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}\,(1\,;\,1\,;\,1)$.

Le plan $\mathscr{P}_e$ d'équation $x+4y+2=0$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}\,(1\,;\,4\,;\,0)$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les plans ne sont pas parallèles ; ils sont sécants.

b. Vérifions que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t+7 \\ y & = & -t-1 \\ z & = & 3t+4 \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

Considérons le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x+4y+2 & = & 0 \\ y & = & t \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x+4y+2 & = & 0 \\ y & = & t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & -x-y \\ x & = & -4t-20 \\ y & = & t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 3t+2 \\ x & = & -4t-20 \\ y & = & t \end{array}\right.$$

On en déduit que la droite d, intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4t-2 \\ y & = & t \\ z & = & 3t+2 \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.

c. On déduit de la représentation paramétrique précédente que la droite d a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u'}\,(-4\,;\,1\,;\,3)$.

Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}\,(2\,;\,-1\,;\,3)$.

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'}=0$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux : la droite d et le plan (ABC) sont parallèles .

Ex 2 :

1°) **Faux !** On le montre en déterminant le module et l'argument de z :

$$z=\frac{3+\sqrt{3}i}{2i}\times\frac{i}{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i=\sqrt{3}(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\sqrt{3}(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))=\sqrt{3}e^{i\frac{-\pi}{3}}$$

$$|z|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{3}\quad donc\quad \begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \arg(z)=-\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

2°) **Faux !** On passe en forme algébrique :

$\bar{z}=iz\Leftrightarrow a-ib=i(a+ib)\Leftrightarrow a+b-(a+b)i=0\Leftrightarrow a+b=0\Leftrightarrow a=-b$ Tous les complexes dont la partie imaginaire est l'opposé de la partie réelle sont solutions de l'équation.

3°) **Vrai !** Il suffit de calculer les longueurs des côtés :

$$z_A=-2\quad;\quad z_B=4e^{-i\frac{\pi}{3}}=4(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2-2\sqrt{3}i\quad;\quad z_C=3+\sqrt{3}i$$

$$AB=|z_{\overrightarrow{AB}}|=|z_B-z_A|=|4-2\sqrt{3}i|=\sqrt{16+12}=\sqrt{28}$$

$$AC=|5+\sqrt{3}i|=\sqrt{25+3}=\sqrt{28}$$

$$BC=|1+3\sqrt{3}|=\sqrt{1+27}=\sqrt{28}$$

Ex 3 :

Partie A :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, d'où par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Pour tout x réel, $f(x) = xe^x + e^x$.

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

2. Pour tout réel x, $f'(x) = 1e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.

3. Pour tout réel x, $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$signe\ de\ f'(x)$		$-$	0	$+$	
$variation\ de\ f$	0	$\searrow$	$-1/e^2$	$\nearrow$	$+\infty$

4. f étant strictement décroissante sur]- ∞;-2] et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, on a $f(x) < 0$ sur]-∞;-2] .

Donc, l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur] - ∞ ; -2] .

f est continue, strictement croissante sur [-2;+∞[et $f(-2) < 2$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution sur [-2;+∞[.

Ainsi, l'équation $f(x) = 2$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$

5. a)

	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5
c	0	0	0,25	0,25	0,3125
d	1	0,5	0,5	0,375	0,375
d - c	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
p	0,5	0,25	0,375	0,3125	
f(p) ≈	2,47	1,6	2,0006	1,79	

b) Cet algorithme affiche un encadrement de α solution de l'équation *f(x)*=2 d'amplitude inférieure à 0,1.

Partie B

1. **a.** On a, pour tout réel x :

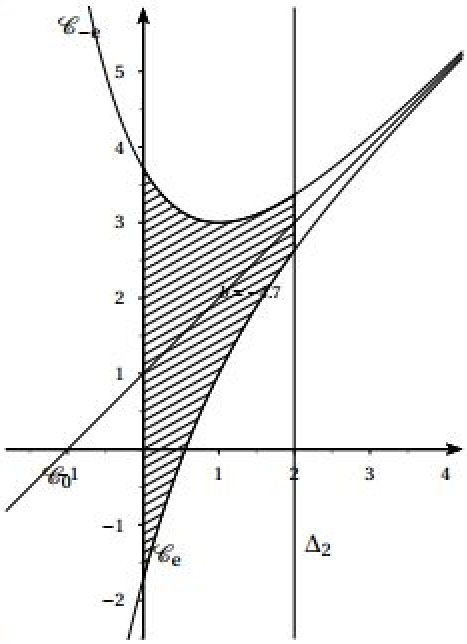
$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x + 1 = me^x \\ &\iff (x+1)\mathrm{e}^x = m \\ &\iff f(x) = m. \end{aligned}$$

b. D'après l'équivalence et le tableau de variations précédents :
- si $m < -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ ne possède aucune solution, donc $\mathscr{C}_m$ ne coupe pas l'axe des abscisses ;
- si $m = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point ;
- si $-\frac{1}{\mathrm{e}^2} < m < 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points ;
- si $m \geqslant 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathscr{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point

2. - La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses, donc l'équation $g_m(x) = 0$ n'a pas de solution et cela entraîne que $m < -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. La seule possibilité est donc que $m = -\mathrm{e}$.
   - La courbe 2 coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc $m = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ ou $m \geqslant 0$. La seule possibilité est donc $m = 0$.
   - Par élimination, la courbe 3 correspond à $m = \mathrm{e}$.

3. Pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = -me^x$ qui est du signe de $-m$; on en déduit :
   - si $m > 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est en dessous de $\mathscr{D}$;
   - si $m < 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est au dessus de $\mathscr{D}$;
   - si $m = 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = 00$, donc $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$ sont confondues.

4. Le domaine D_2 hachuré :



a.

b. Pour tout $a \geqslant 0$, la courbe $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ est au dessus de $\mathscr{C}_\mathrm{e}$, par conséquent l'aire $\mathscr{A}(a)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(a) &= \int_0^a f_{-\mathrm{e}}(x) - f_\mathrm{e}(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a \left((x+1) + \mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\right) - \left((x+1) - \mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a 2\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= 2\mathrm{e}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^a \\ &= 2\mathrm{e}\left(-\mathrm{e}^{-a} + 1\right) \\ &= 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{1-a}. \end{aligned}$$

On a de plus $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathrm{e}^{1-a} = 0$, par conséquent : $\lim\limits_{a \to +\infty} \mathscr{A}(a) = 2\mathrm{e}$.

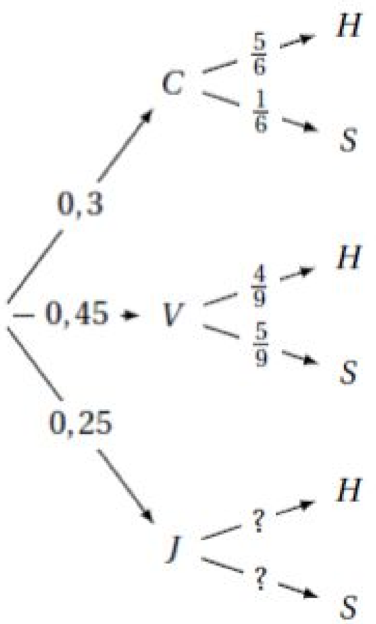
Exercice 4 :

Partie 1 :

ROC : voir cours

Partie 2 :

A)



1. On veut $P(C\cap H) = P(C)\times P_C(H) = 0,3\times\frac{5}{6} = \frac{1}{4}$.
2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.
   (a) Nous venons de calculer $P(C\cap H) = 0,25$ et
   $P(C)\times P(H) = 0,3\times\frac{13}{20} = \frac{39}{200} \neq P(C\cap H)$
   Les évènements C et H ne sont pas indépendants.
   (b) d'après l'arbre, $P(H) = P(H\cap C)+P(H\cap V)+P(H\cap J)$.
   On a donc $P(J\cap H) = \frac{13}{20}-\frac{1}{4}-0,45\times\frac{4}{9} = \frac{1}{5}$
   et $P_J(H) = \frac{P(J\cap H)}{P(J)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$.

B)

1. Notons X : la variable aléatoire qui compte le nombre de morceaux de musique classique lors de la l'écoute de 60 morceaux de musique. Ainsi X suit une loi binomiale de paramètre n= 60 et p =0,30. D'après la calculatrice on trouve que l'intervalle de fluctuation au seuil 95% de la proportion de morceaux de musique classique pour des échantillons de taille 60 est $[\frac{11}{60};\frac{25}{60}]$.

2. La fréquence des morceaux de musique classique écoutés dans l'échantillon est : $\frac{12}{60}$, elle appartient donc à l'intervalle de fluctuation au seuil 95%. Ainsi on ne peut pas considérer que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas soit défectueuse.

Corrigé de l'exercice 4 pour les élèves ayant suivi la spécialité Mathématiques. Avril 2014

Trois marques de shampoing X, Y et Z occupent un secteur de consommation. Chaque mois, les consommateurs de la population étudiée utilisent une et une seule de ces marques.

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.

Une étude faite sur une période d'essai a donné les estimations suivantes :

- si un consommateur utilise la marque X un mois donné, il l'utilise encore le mois suivant dans 40% des cas, dans 30% des cas, il opte pour la marque Y et, dans 30% des cas, il opte pour la marque Z.

- si un consommateur utilise la marque Y un mois donné, il l'utilise encore le mois suivant dans 40% des cas, dans 30% des cas, il opte pour la marque X et, dans 30% des cas, il opte pour la marque Z.

- si un consommateur utilise la marque Z un mois donné, il l'utilise encore le mois suivant dans 70% des cas, dans 20% des cas, il opte pour la marque X et, dans 10% des cas, il opte pour la marque Y.

Soit n un entier naturel.

Pour un consommateur pris au hasard, on note x_n , y_n et z_n les probabilités respectives des évènements X_n : « la marque X est utilisée le n-ième mois», Y_n : « la marque Y est utilisée le n-ième mois» et Z_n : « la marque Z est utilisée le n-ième mois».

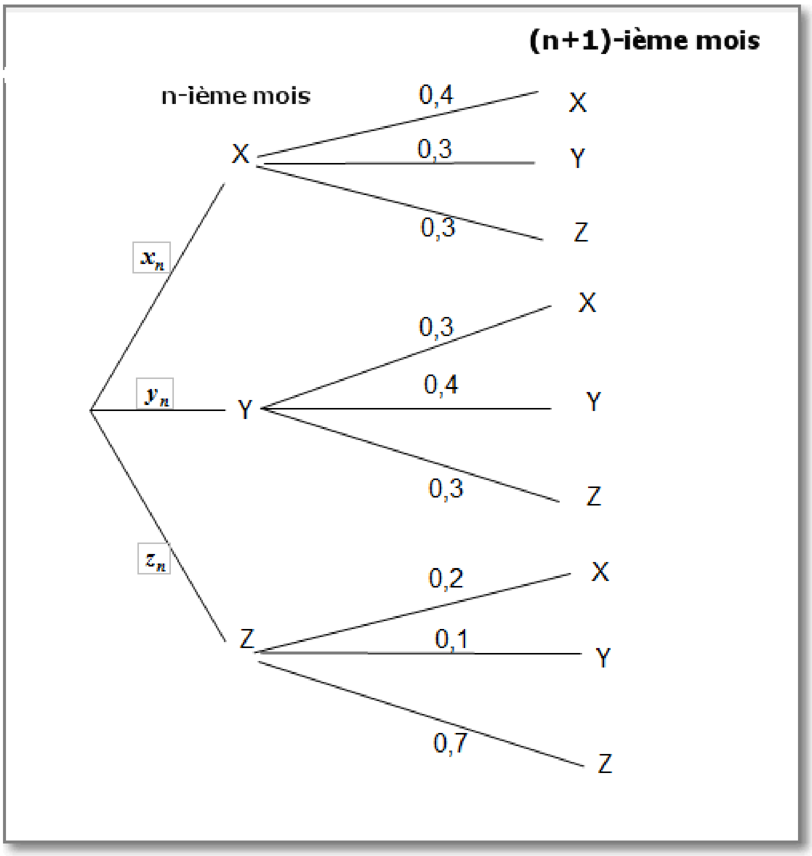
Au cours du mois d'essai $(n=0)$, on a observé les valeurs initiales $x_0=0{,}1$; $y_0=0{,}2$ et $z_0=0{,}7$

1. a. Justifier l'égalité matricielle suivante à l'aide d'un arbre de probabilités :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n , exprimons x_n+1 , y_n+1 et z_n+1 en fonction de x_n , y_n et z_n .

Traduisons la situation à l'aide d'un arbre :



On peut en déduire alors, d'après la formule des probabilités totales que :

$x_{n+1}=0{,}4\,x_n+0{,}3\,y_n+0{,}2\,z_n$

$y_{n+1}=0{,}3\,x_n+0{,}4\,y_n+0{,}1\,z_n$

$z_{n+1}=0{,}3\,x_n+0{,}3\,y_n+0{,}7\,z_n$

Ceci correspond exactement à l'écriture matricielle proposée.

b. On pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. En utilisant la valeur de la somme $x_n+y_n+z_n$, montrer que l'on a

$U_{n+1}=AU_n+B$ avec $A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$.

On souhaite travailler avec une matrice d'ordre 2, on va donc éliminer une variable en utilisant le fait que, quelque soit n entier naturel, $x_n+y_n+z_n=1$. On a alors $z_n=1-x_n-y_n$.
On va substituer cette expression de z_n dans les expressions de x_{n+1} et y_{n+1} .
On obtient $x_{n+1}=0{,}4\,x_n+0{,}3\,y_n+0{,}2(1-x_n-y_n)$ et $y_{n+1}=0{,}3\,x_n+0{,}4\,y_n+0{,}1(1-x_n-y_n)$ soit après développement et simplification :

$$\begin{cases} x_{n+1}=0{,}2\,x_n+0{,}1\,y_n+0{,}2 \\ y_{n+1}=0{,}2\,x_n+0{,}3\,y_n+0{,}1 \end{cases}$$

Ceci se traduit en écriture matricielle par $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$ **, c'est à dire,**

pour tout entier naturel n : $U_{n+1}=A\,U_n+B$.

2. Soit la matrice $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

a. Vérifier que P est inversible et préciser P^{-1} .

$det(P)=1\times 2-1\times(-1)=3\neq 0$ **donc P est inversible.**

D'après le cours, son inverse est $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

b. Calculer $D=P^{-1}AP$ et préciser D^n .

On calcule : $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0\\ 0 & 0{,}4\end{pmatrix}$.

D est une matrice diagonale donc, pour tout n entier naturel, $D^n=\begin{pmatrix}0{,}1^n & 0\\ 0 & 0{,}4^n\end{pmatrix}$.

c. Montrer que $A=PDP^{-1}$.

On sait que, par définition, $D=P^{-1}AP$ donc, par associativité de la multiplication des matrices : $PDP^{-1}=P(P^{-1}AP)P^{-1}=(PP^{-1})A(PP^{-1})=IAI=A$

En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n=PD^nP^{-1}$.

Proposition $P(n)$: $A^n=PD^nP^{-1}$

♦ Initialisation : Pour $n=0$ d'une part $A^0=I$ et d'autre part $PD^0P^{-1}=PIP^{-1}=PP^{-1}=I$

Donc la proposition est vraie au rang $n=0$

♦ Hérédité : Supposons que la proposition est vraie pour un certain rang n , on suppose donc que $A^n=PD^nP^{-1}$.

Montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$, c'est à dire que $A^{n+1}=PD^{n+1}P^{-1}$

On a $A^{n+1}=A\,A^n=(PDP^{-1})(PD^nP^{-1})=PD(P^{-1}P)D^nP^{-1}=PD\,I\,D^nP^{-1}=PDD^nP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$

La proposition est donc héréditaire.

♦ Conclusion : La proposition est initialisée à $n=0$ et elle est héréditaire, on en déduit, d'après l'axiome de récurrence, qu'elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

d. Calculer A^n .

Il suffit de calculer minutieusement à la main :

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0{,}1^n & 0\\ 0 & 0{,}4^n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\times 0{,}1^n+\frac{1}{3}\times 0{,}4^n & \frac{-1}{3}\times 0{,}1^n+\frac{1}{3}\times 0{,}4^n\\ \frac{-2}{3}\times 0{,}1^n+\frac{2}{3}\times 0{,}4^n & \frac{1}{3}\times 0{,}1^n+\frac{2}{3}\times 0{,}4^n\end{pmatrix}$$

3. a. Soit I la matrice identité d'ordre 2, montrer que $I-A$ est inversible.

Montrons que la matrice $I-A$ est inversible :

On a $I-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}2 & 0{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}8 & -0{,}1\\ -0{,}2 & 0{,}7\end{pmatrix}$.

$det(I-A)=(0{,}8)\times(0{,}7)-(-0{,}2)\times(-0{,}1)=0{,}54\neq 0$ **. On en déduit que $I-A$ est une matrice inversible**

b. En utilisant la question précédente, déterminer la matrice C telle que $C=AC+B$

On a $C=AC+B \Leftrightarrow C-AC=B \Leftrightarrow (I-A)C=B$ et comme $I-A$ est inversible

$C=AC+B \Leftrightarrow C=(I-A)^{-1}\times B$. On obtient avec la calculatrice $C=\begin{pmatrix}\frac{5}{18}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}$

Attention : L'ordre dans la factorisation de $C-AC$ est important car $AC\neq CA$

4. a.Pour tout entier naturel n, on pose $V_n=U_n-C$, démontrer que $V_n=A^n V_0$.

Il y a plusieurs façons de procéder, en voici une différente de celle que nous avons faite en classe.
On procède par récurrence :
♦ Initialisation : Pour $n=0$ on a $A^0 V_0=I\times V_0=V_0$. La propriété est donc vraie au rang $n=0$.
♦ Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un certain rang n , on suppose donc que $V_n=A^n V_0$
Montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$, c'est à dire que $V_{n+1}=A^{n+1} V_0$.

Par définition :
$$V_{n+1}=U_{n+1}-C=AU_n+B-C=A(V_n+C)+B-C=A V_n+AC+B-C=A V_n+C-C=A V_n=A A^n V_0=A^{n+1} V_0$$
La propriété est donc héréditaire.
♦ Conclusion : La propriété est initialisée à $n=0$ et elle est héréditaire on en déduit donc, d'après l'axiome de récurrence, qu'elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de A^n et C puis l'expression de x_n et y_n en fonction de n et des valeurs initiales x_0 et y_0 .

$$U_n=V_n+C=A^n V_0+C=A^n(U_0-C)+C$$

Notons $a_n=\frac{2}{3}\times 0{,}1^n+\frac{1}{3}\times 0{,}4^n$; $b_n=\frac{-1}{3}\times 0{,}1^n+\frac{1}{3}\times 0{,}4^n$; $c_n=\frac{-2}{3}\times 0{,}1^n+\frac{2}{3}\times 0{,}4^n$;
$d_n=\frac{1}{3}\times 0{,}1^n+\frac{2}{3}\times 0{,}4^n$

Nous avons donc : $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0-\frac{5}{18}\\ y_0-\frac{2}{9}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{5}{18}\\ \frac{2}{9}\end{pmatrix}$

5. Déterminer les limites des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) . Ces limites dépendent-elles de la situation initiale ?

Que conclure sur l'utilisation, à long terme, des marques de shampoing X, Y et Z ?

$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}4^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}1^n =0$, (car 0,1 et 0,4 sont strictement compris entre 0 et 1), on peut en déduire que les quatre coefficients de la matrice A^n vont tendre vers 0 lorsque n tendra vers $+\infty$.

On en déduit que la suite (U_n) converge vers C et les suites de probabilités (x_n) et (y_n) convergent respectivement vers $\frac{5}{18}$ et $\frac{2}{9}$, ces limites ne dépendant pas de x_0 et y_0 .

Puisque $z_n=1-x_n-y_n$ on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} z^n = 1-\frac{5}{18}-\frac{2}{9}=\frac{1}{2}$.

On peut donc dire qu'à long terme, environ 28 % des consommateurs de la population étudiée utiliseront la marque X , environ 22 % utiliseront la marque Y et la moitié des consommateurs utiliseront la marque Z.