BAC BLANC TS

CORRIGÉ BAC BLANC   Tle S AVRIL 2012

Ex 1 :

1°) $z^2+3z+3=0$

$\Delta=-3$

Deux solutions complexes : $z=\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ ou $z=\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ Donc VRAI

2°) Avec $z=x+iy$

$|z-2|=|z-2i|$

$\Leftrightarrow\ |x-2+iy|=|x+i(y-2)|$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$\Leftrightarrow\ (x-2)^2+y^2=x^2+(y-2)^2$

$\Leftrightarrow\ x^2-4x+4+y^2=x^2+y^2-4y+4$

$\Leftrightarrow\ -4x=-4y$

$\Leftrightarrow\ y=x$

L'ensemble solutions est bien la droite d'équation $y=x$. VRAI

3°) Si $\frac{b-a}{c-a}=-3$ alors b-a=-3(c-a)

et donc $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$

Ainsi, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, les points sont donc alignés. VRAI

4°) L'affixe z du point fixe éventuel de cette transformation vérifie $z=\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z-i-\sqrt{3}$

C'est à dire $z\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=-i-\sqrt{3}$.

D'où $z=\frac{-i-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}=-2i$

Soit A d'affixe $-2i$ le point fixe de la transformation.

De plus, on montre que $a=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{i\pi}{3}}$.

Or $z'-z_A=e^{\frac{i\pi}{3}}(z-z_A)$

$\Leftrightarrow\ z'+2i=\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(z+2i)$

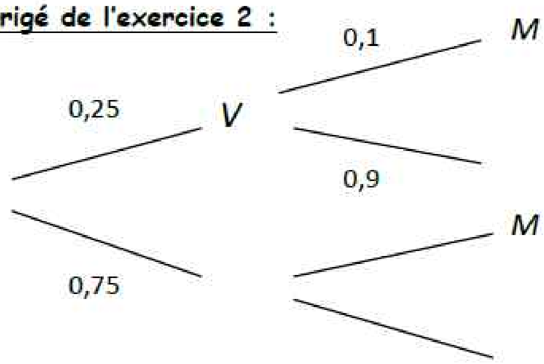
$\Leftrightarrow\ z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z+i-\sqrt{3}-2i$

$\Leftrightarrow\ z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z-i-\sqrt{3}$

Ainsi, la transformation est la rotation de centre A d'affixe $-2i$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Donc VRAI.

Corrigé de l'exercice 2 :



2. $p(M\cap V)=0,25\times 0,1=0,025$

on sait que $p_M(V)=\dfrac{1}{13}=\dfrac{p(M\cap V)}{p(M)}=\dfrac{0,025}{p(M)}$ *donc* $p(M)=0,025\times 13=0,325$.

3. $p(M\cap V)+p(M\cap\overline{V})=p(M)=0,325$ *donc* $p(M\cap\overline{V})=0,325-0,025=0,3$.

4. $p_{\overline{V}}(M)=\dfrac{p(M\cap\overline{V})}{p(\overline{V})}=\dfrac{0,3}{0,75}=0,4$

5. $p_V(M)=0,1=\dfrac{0,4}{4}=0,25\times p_{\overline{V}}(M)$

On peut donc conclure que l'on 4 fois moins de chance d'être malade si on est vacciné. Le vaccin est donc efficace.

Corrigé de l'exercice 3 :

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

La fonction composée $x\rightarrow exp(lnx)$ est dérivable sur]0 ;1[et sa dérivée est :

$$x\rightarrow exp(ln(x))\times(ln(x))'.$$

De plus *exp(lnx) = x* donc *x (ln(x))'= 1* pour tout *x* de]0 ; +1[soit *(ln(x)) ' =1/x*.

PARTIE B : Étude d'une fonction auxiliaire : g définie sur]0 ; +∞[par : $g(x)=x^2+1-\ln(x)$.

1. Étude des variations de g sur]0 ; +∞[: $g'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$

$2x^2$-1 est un trinôme du second degré qui est positif à l'extérieur des deux racines qui sont - $\sqrt{2}/2$ et $\sqrt{2}/2$. x est strictement positif sur]0 ; +∞[par conséquent :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
signe $g'(x)$		-	0	+	
variation de g		↘	$\approx 1,8$	↗	

$$g(\sqrt{2}/2)=\frac{2}{4}+1-\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{3}{2}-\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})\approx 1,8$$

En observant les variations de g, on peut constater que g(x)>0 sur]0 ;+∞[.

II - Étude de la fonction *f* définie sur]0 ; +∞[par $f(x)=x+\frac{\ln(x)}{x}$ et tracé de *Cf*

1. <u>**Limite en 0 de *f***</u> : $\lim\limits_{x\to0}(x+\frac{\ln(x)}{x})=\underbrace{\lim\limits_{x\to0}x}_{0}+\underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}}_{+\infty}\times\underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x)}_{+\infty}=-\infty$. (Oy) est une asymptote à *Cf.*

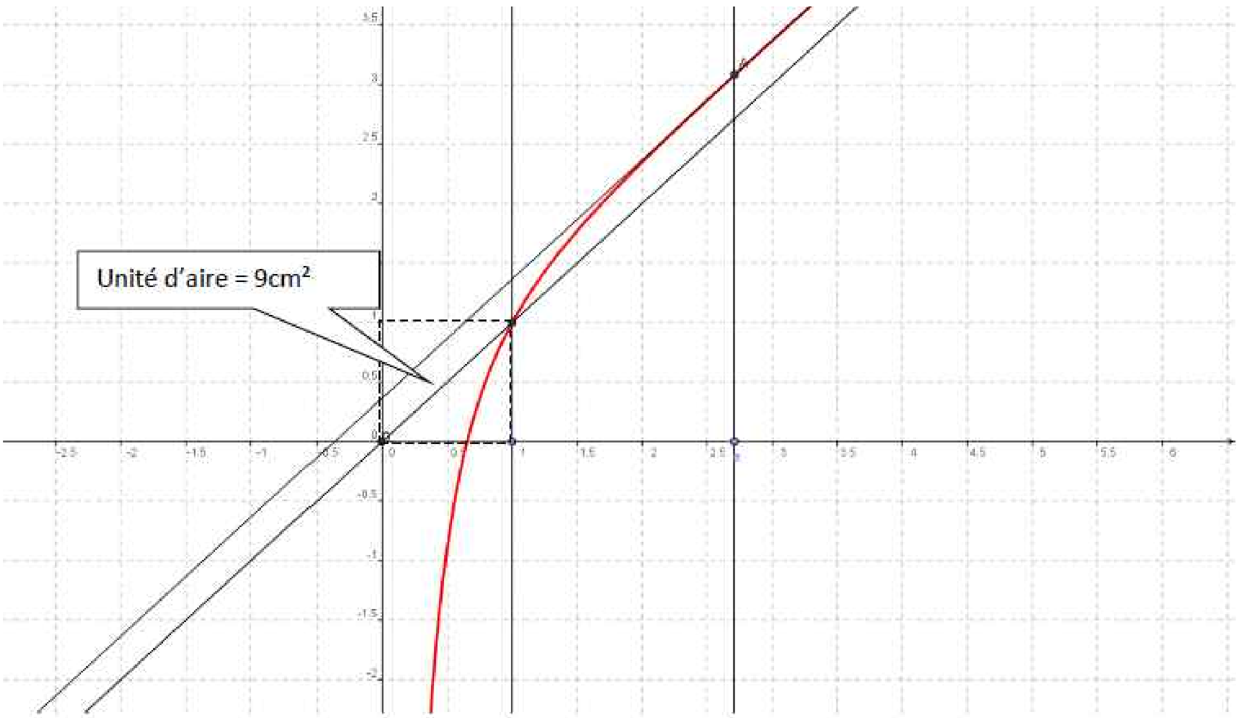
2. <u>**Limite en+∞ de *f***</u> : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\frac{\ln(x)}{x})=\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}x}_{+\infty}+\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}}_{0}=+\infty$ *de plus:* $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}}_{0}=0$

donc Cf admet (D) comme asymptote oblique.

3. $f'(x)=1+\frac{1/x\times x-1\times\ln(x)}{x^2}=\frac{x^2+1-\ln(x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$. f'(x) est du signe de la fonction g dont strictement positive sur]0 ;+∞[. Par conséquent :

x	0	+∞
Signe de f'(x)	+	
Variation de f	-∞ ↗	+∞

5. Déterminons le point A de la courbe Cf en lequel la tangente (T) est parallèle à la droite (D). Le coefficient directeur de la droite (D) est 1 donc on doit résoudre f'(x)=1 soit g(x)=x^2 c'est-à-dire x^2+1-ln(x)=x^2 d'où ln(x)=1 et x=e. donc A(e ;f(e))=(e ; e+1/e)



III - Calcul d'une aire :

1. $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx = \int_1^e u'(x)u(x)dx = [\frac{1}{2}u(x)^2]_1^e = [\frac{1}{2}\ln(x)]_1^e = \frac{1}{2}$

2. Sur [1;e] f est positive donc Aire(partie hachurée)= $\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e x\,dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e + \frac{1}{2}$

$= \frac{e^2}{2}$ u.a.

$\approx 33\ cm^2$

<u>Ex 4 :</u> *Non spécialistes*

1. Calculer U_2 et en déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
$U_2 = U_1 - 0{,}25U_0 = 0{,}5 - 0{,}25\times -1 = 0{,}75$

Comme $U_1 - U_0 = 0{,}5-(-1) = 1{,}5$ et que $U_2 - U_1 = 0{,}75-(0{,}5) = 0{,}25$ la suite n'est pas arithmétique.

Comme $U_1/U_0 = \frac{0{,}5}{-1} = -0{,}5$ et que $U_2/U_1 = \frac{0{,}75}{0{,}5} = 1{,}5$ la suite n'est pas géométrique.

2. On définit la suite (V_n) en posant, pour tout entier naturel n : $V_n = U_{n+1} - 0{,}5U_n$.
a. $V_0 = U_1 - 0{,}5U_0 = 0{,}5-0{,}5\times(-1) = 1$

b. $V_{n+1} = U_{n+2} - 0{,}5U_{n+1} = U_{n+1} - 0{,}25U_n - 0{,}5U_{n+1} = 0{,}5U_{n+1} - 0{,}25U_n = 0{,}5(U_{n+1} - \frac{0{,}25}{0{,}5}U_n) = 0{,}5(U_{n+1} - 0{,}5U_n) = 0{,}5V_n$

c. Comme $V_{n+1} = 0{,}5V_n$ on peut affirmer que (V_n) est une suite géométrique de raison q = 0,5 .

d. Donc $V_n = q^n V_0 = 0{,}5^n \times 1 = 0{,}5^n$

3. On définit la suite (W_n) en posant, pour tout entier naturel n : $W_n = \frac{U_n}{V_n}$

a. $W_0 = \frac{U_0}{V_0} = \frac{-1}{1} = -1$

b et c . $W_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} = \frac{V_n + 0{,}5U_n}{0{,}5V_n} = 2 + \frac{U_n}{V_n} = 2 + W_n$

d. (W_{n+1}) est donc une suite arithmétique de raison r = 2 et de premier terme $W_0 = -1$
donc $W_n = W_0 + nr = -1 + 2n$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n : $U_n = \frac{2n-1}{2^n}$

Comme $W_n = \frac{U_n}{V_n}$ on a $W_n \times V_n = U_n$ donc $U_n = (2n-1)\times 0{,}5^n = (2n-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2n-1}{2^n}$ CQFD

5. Démontrer par récurrence que pour tout n de N : $S_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots + U_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$

Initialisation : Pour n=0 on a $S_0 = U_0 = 2 - \frac{2\times 0+3}{2^0} = 2-3 = -1$ c'est vraie

On suppose que $S_p = 2-\frac{2p+3}{2^p}$

Montrons l'hérédité : $S_{p+1} = S_p + U_{p+1} = 2-\frac{2p+3}{2^p} + U_{p+1} = 2-\frac{2p+3}{2^p} + \frac{2(p+1)-1}{2^{p+1}} = 2-\frac{2(2p+3)}{2^{p+1}} + \frac{2(p+1)-1}{2^{p+1}}$

$$= 2-\frac{4p+6-2p-2+1}{2^{p+1}} = 2-\frac{2p+5}{2^{p+1}} = 2-\frac{2(p+1)+3}{2^{p+1}} \text{ CQFD}$$

Nous avons montreé l'hérédité donc quelque soit $n \in \mathbb{N}$: $S_n = U_0+U_1+ \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n = 2-\frac{2n+3}{2^n}$.

Ex 4 : *Spécialité*

Partie A

On considère l'équation (E) : $7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1°) $7\times 1 - 6\times 1 = 1$ donc (1;1) est une solution de (E).

2°) $7x - 6y = 1 = 7\times 1 - 6\times 1$

D'où $7(x-1) = 6(y-1)$

6 divise $7(x-1)$ et 6 est premier avec 7 donc par le théorème de Gauss, 6 divise $x-1$.

Ainsi : $x-1 = 6k$ avec k entier.

Et donc $7\times 6k = 6(y-1)$

D'où $y-1 = 7k$

L'ensemble des solutions de (E) : {(1+6k;1+7k), k entier }.

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3\times 2^m = 1$ (F).

1°) On suppose $m \leqslant 4$.

pour $m = 1$, l'équation (F) donne $7^n = 7$, donc $n = 1$.

Ainsi (1;1) est solution.

$m = 2$: $7^n = 13$ impossible.

$m = 3$: $7^n = 25$ impossible.

$m = 4$: $7^n = 49$ et donc $n = 2$. Ainsi $(2 ; 4)$ est solution.

En conclusion pour $m \leqslant 4$, il y a exactement deux couples solutions : $(1 ; 1)$ et $(2 ; 4)$

2°) On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.

a) Soit $(n ; m)$ solution de (F) : $7^n - 3\times 2^m = 1$

Comme $m \geqslant 5$, il existe p entier naturel tel que $m = 5 + p$ et $2^m = 2^5\times 2^p = 32\times 2^p$

Donc $2^m \equiv 0$ [32]

Et donc, $7^n \equiv 1$ [32]

b) $7^0 \equiv 1$ [32]

$7 \equiv 7$ [32]

$7^2 \equiv 17$ [32]

$7^3 \equiv 23$ [32]

$7^4 \equiv 1$ [32] et ainsi de suite.

Les restes possibles dans la division des puissances de 7 par 32 sont 1 , 7 , 17 et 23.

Si n n'est pas divisible par 4 les restes sont 7,17 ou 23.

Le reste est 1 seulement lorsque n est divisible par 4.

c) $n=4\ k$ avec k entier naturel.
$7^n=7^{4\ k}=\left(7^4\right)^k$
Or $7^4=2401$ et donc $7^4\equiv 1\ [5]$
D'où $7^n\equiv 1\ [5]$

d) Si $(n\ ;\ m)$ est solution de (F), on a : $7^n-3\times 2^m=1$ avec $7^n\equiv 1\ [5]$
D'où $3\times 2^m\equiv 0\ [5]$
Or $3\equiv -2\ [5]$.
On devrait donc avoir une puissance de 2 divisible par 5, ce qui est impossible.
Pour $m\geqslant 5$, il n'existe pas de couple (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F).

3°) En conclusion deux couples seulement sont solutions de (F) : $(1\ ;\ 1)$ et $(2\ ;\ 4)$.