EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

On calcule avec la définition : $u_1 = 64$ **;** $u_2 = 314$ **;** $u_3 = 1564$ **;** $u_4 = 7814$

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

$u_0 \equiv 14[100]$	$u_1 \equiv 64[100]$	$u_2 \equiv 14[100]$	$u_3 \equiv 64[100]$	$u_4 \equiv 14[100]$

b) Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

On peut conjecturer que u_{2p} **se termine par 14 et donc** $u_{2p} \equiv 14[100]$ **et** u_{2p+1} **se termine par 64 et** $u_{2p+1} \equiv 64[100]$**.**

2. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+2} \equiv u_n[4]$.

En déduire, par récurrence immédiate, que pour tout entier naturel *k*, $u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$.

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36$ **=** $u_n + 24u_n - 36$ **=** $u_n + 4(6u_n - 9)$ **avec** $6u_n - 9$ **entier.**
donc $u_{n+2} \equiv u_n[4]$**.**

Or $u_0 = 14 = 4 \times 3 + 2$**, donc** $u_0 \equiv 2[4]$**, on en déduit par transitivité , puisque** $u_2 \equiv u_0[4]$ **,** $u_2 \equiv 2[4]$ **de même pour** u_4**,** u_6 **etc... Pour tout entier naturel *p*,** $u_{2p} \equiv 2[4]$**.**
(Vous savez rédiger comme il faut la récurrence)
De même, $u_1 = 64 = 4 \times 16$**, donc** $u_1 \equiv 0[4]$ **donc** $u_{2p+1} \equiv 0[4]$**, pour tout entier naturel *p*.**

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

   Soit la proposition $\mathrm{P_n}$ « $2u_n = 5^{n+2} + 3$ »

Initialisation : $2u_0 = 2 \times 14 = 28$ **et** $5^2 + 3 = 28$ **donc** $\mathrm{P_0}$ **est vraie.**
Hérédité : supposons que pour un entier *n* donné on ait $2u_n = 5^{n+2} + 3$**, montrons qu'alors** $2u_{n+1} = 5^{n+3} + 3$**.**
Calculons :
$2u_{n+1} = 2(5u_n - 6) = 5 \times 2u_n - 12$ **=** $5(5^{n+2} + 3) - 12 = 5^{n+3} + 15 - 12$ **=** $5^{n+3} + 3$**.**
La proposition est donc vraie au rang (*n* +1). L'hérédité est vérifiée.
Conclusion : D'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel *n*, $2u_n = 5^{n+2} + 3$

b. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $2u_n \equiv 28[100]$. Peut-on simplifier par 2 et affirmer que, pour tout *n* , $u_n \equiv 14[100]$?

$5^2 = 25 \equiv 25[100]$ **,** $5^3 = 125 = 100 + 25 \equiv 25[100]$**.**
Montrons alors par récurrence rapide, que pour tout *n* entier naturel, $5^{n+2} \equiv 25[100]$
L'initialisation est faite ; supposons que pour un *n* donné , $5^{n+2} \equiv 25[100]$**, alors , en multipliant par 5 nous obtenons** $5^{n+3} \equiv 125[100] \equiv 25[100]$**, l'hérédité est vérifiée.**
Conclusion : pour tout *n* entier naturel, $5^{n+2} \equiv 25[100]$

On a donc $2u_n \equiv 25 + 3[100]$ **donc** $2u_n \equiv 28[100]$**.**
Nous savons que la division n'est pas compatible avec les congruences et la question 1 nous donne des contre-exemples avec u_1 **par exemple qui n'est pas congru à 14 modulo 100.**

4. En utilisant les résultats de la question 2 et de la question 3 b, prouver la conjecture faite à la question 1

sur les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de $\boldsymbol{u_n}$ suivant les valeurs de n.

Nous allons utiliser : pour tout entier naturel k, $\boldsymbol{u_{2k} \equiv 2[4]}$ et $\boldsymbol{u_{2k+1} \equiv 0[4]}$ et pour tout n, $\boldsymbol{2u_n \equiv 28[100]}$

♦ Si $n=2p$ avec $p \in \mathbb{N}$ alors $2u_{2p}=28+m\times 100$, $m\in\mathbb{Z}$ et en divisant l'égalité par 2 :
$u_{2p}=14+m\times 50=4\times 3+2+m\times(4\times 12+2)$ donc $u_{2p}\equiv 2+2m[4]$ or nous savons que $u_{2p}\equiv 2[4]$ donc $2+2m\equiv 2[4]$ donc $2m\equiv 0[4]$ donc $2m=4s$, s entier donc $m=2s$ donc $u_{2p}=14+100s\equiv 14[100]$
Les nombres u_{2p} se terminent donc par 14.

On refait de même :
♦ Si $n=2p+1$ avec $p\in\mathbb{N}$ alors $2u_{2p+1}=28+m\times 100$, $m\in\mathbb{Z}$ et en divisant par 2 :
$u_{2p+1}=14+m\times 50=4\times 3+2+m\times(4\times 12+2)$ donc $u_{2p+1}\equiv 2+2m[4]$ or nous savons que $u_{2p+1}\equiv 0[4]$ donc $2+2m\equiv 0[4]$ donc $2m\equiv 2[4]$ donc $2m=2+4s$, s entier donc $m=1+2s$ donc
$u_{2p+1}=14+(1+2s)\times 50=64+100s\equiv 64[100]$
Les nombres u_{2p+1} se terminent donc par 64.

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est constant et préciser sa valeur.

On utilise la propriété : $\text{PGCD}(a;b)=\text{PGCD}(a-kb;b)$, k entier
Donc $\text{PGCD}(u_{n+1};u_n)=\text{PGCD}(5u_n-6;u_n)$ = $\text{PGCD}(5u_n-6-5u_n;u_n)$ = $\text{PGCD}(-6;u_n)=\text{PGCD}(u_n;6)$
Ce PGCD est donc un diviseur de 6 donc c'est 1 ou 2 ou 3 ou 6.
La relation $2u_n=5^{n+2}+3$ équivalente à $5^{n+2}=2u_n-3$, nous indique que u_n n'est pas divisible par 3 car sinon 5^{n+2} le serait aussi, ce qui est impossible.
donc le PGCD ne peut pas être 3 ou 6 , d'autre part , tous les termes sont pairs puisque se terminant par 14 ou 64 , donc divisibles par 2 donc PGCD n'est pas 1 mais 2.
Conclusion : $\text{PGCD}(u_{n+1};u_n)=2$.