<u>Ex 1 :</u> (Spécialité)

1°) a) $a \equiv b$ [7] donc il existe un entier k tel que $a = b + 7k$
$c \equiv d$ [7] donc il existe un entier k tel que $c = d + 7k'$
Ainsi, $ac = (b+7k)(d+7k') = bd + 7bk' + 7kd + 49kk' = bd + 7K$ avec
$K = bk' + kd + 7kk'$ entier.
Donc $ac \equiv bd$ [7]
b) Par récurrence : Soit a et b tels que $a \equiv b$ [7]
Initialisation : Pour $n = 0$, $a^0 = 1$ et $b^0 = 1$, on a bien $a^0 \equiv b^0$ [7].
Hérédité : H) On suppose que pour un certain entier $n \geqslant 0$ $a^n \equiv b^n$ [7]
c) Montrons que $a^{n+1} \equiv b^{n+1}$ [7]
Si $a^n \equiv b^n$ [7] et $a \equiv b$ [7] alors d'après 1°) a) $a^n \times a \equiv b^n \times b$ [7] c'est à dire $a^{n+1} \equiv b^{n+1}$ [7]
On a donc montré par récurrence que pour tout n entier naturel , $a^n \equiv b^n$ [7].
2°) $2^3 = 8$ et $8 \equiv 1$ [7]
$3^2 = 9$ et $9 \equiv 2$ [7] d'où $9^3 \equiv 2^3 \equiv 1$ [7], ainsi $3^6 \equiv 1$ [7]
3°) a entier naturel non divisible par 7.
a) Donc a est congru à 1,2,3,-1,-2 ou -3 modulo 7.
Si $a \equiv 1$ [7] alors $a^6 \equiv 1^6 \equiv 1$ [7]
Si $a \equiv -1$ [7] alors $a^6 \equiv (-1)^6 \equiv 1$ [7]
Si $a \equiv 2$ [7] alors $a^6 \equiv 2^6 \equiv (2^3)^2 \equiv 1$ [7]
Si $a \equiv -2$ [7] alors $a^6 \equiv (-2)^6 \equiv 2^6 \equiv 1$ [7]
Si $a \equiv 3$ [7] alors $a^6 \equiv 3^6 \equiv 1$ [7]
Si $a \equiv -3$ [7] alors $a^6 \equiv 3^6 \equiv 1$ [7]
Dans tous les cas $a^6 \equiv 1$ [7]
(Remarque : Cette question se montrera plus rapidement avec le petit théorème de Fermat, théorème du cours à venir ...)
b) Soit k le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1$ [7].
Il existe q entier naturel tel que $6 = qk + r$ avec $0 \leqslant r < k$.
$a^6 \equiv 1$ [7]
et $a^{qk+r} \equiv (a^k)^q \times a^r \equiv a^r$ [7]
Donc $a^r \equiv 1$ [7]
Or $0 \leqslant r < k$ et k est le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1$ [7].
Donc $r = 0$ et ainsi $6 = qk$ c'est à dire k divise 6.
k peut prendre les valeurs 1 ; 2; 3 ou 6.
c) D'après 2°) et 3°) a) $2^1 \equiv 2$ [7] , $2^2 \equiv 4$ [7] et $2^3 \equiv 1$ [7] : ordre de 2 est 3.
$3^1 \equiv 3$ [7], $3^2 \equiv 2$ [7], $3^3 \equiv 6$ [7] et $3^6 \equiv 1$ [7] : ordre de 3 est 6.
$4^1 \equiv 4$ [7], $4^2 \equiv 2$ [7], $4^3 \equiv 1$ [7] : ordre de 4 est 3.
$5^1 \equiv 5$ [7], $5^2 \equiv 4$ [7], $5^3 \equiv 6$ [7] et $5^6 \equiv 1$ [7] ordre de 5 est 6
$6^1 \equiv 6$ [7], $6^2 \equiv 1$ [7] ordre de 6 est 2.
4°) $A_{2012} \equiv 2^{2012} + 3^{2012} + 4^{2012} + 5^{2012} + 6^{2012}$ [7]
Or $2012 = 3 \times 670 + 2$ d'où $2^{2012} \equiv (2^3)^{670} \times 2^2 \equiv 4$ [7] et $4^{2012} \equiv 4^2 \equiv 2$ [7]
$2012 = 335 \times 6 + 2$ d'où $3^{2012} \equiv 3^2 \equiv 2$ [7] et $5^{2012} \equiv 5^2 \equiv 4$ [7]
$2012 = 2 \times 1006$ d'où $6^{2012} \equiv 1$ [7]
Ainsi : $A_{2012} \equiv 4 + 2 + 2 + 4 + 1 \equiv 6$ [7]

<u>Ex 1 :</u> (Obligatoire)

1°) a) $(4\sqrt{3})^3 - 8\sqrt{3}(4\sqrt{3})^2 + 64 \times 4\sqrt{3} - 64\sqrt{3} = 192\sqrt{3} - 384\sqrt{3} + 256\sqrt{3} - 64\sqrt{3} = 0$
b) On développe et on identifie : $a = 1$, $b = -4\sqrt{3}$, $c = 16$
c) $z^3 - 8\sqrt{3}z^2 + 64z - 64\sqrt{3} = 0$
$\Leftrightarrow (z - 4\sqrt{3})(z^2 - 4\sqrt{3}z + 16) = 0$
$\Leftrightarrow z - 4\sqrt{3} = 0$ ou $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$
$\Delta = -16$
Ainsi $z = 4\sqrt{3}$ ou $z = \dfrac{4\sqrt{3} + 4i}{2} = 2\sqrt{3} + 2i$ ou $z = \dfrac{4\sqrt{3} - 4i}{2} = 2\sqrt{3} - 2i$
2°) a) $a = 2\sqrt{3} - 2i$

$|a|=4$ et θ tel que $\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$. $\theta=-\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$a=4\,e^{-\frac{i\pi}{6}}$

$b=\overline{a}$ donc $b=4\,e^{\frac{i\pi}{6}}$

c réel, $c=4\sqrt{3}\,e^{i\times 0}$

b)

c) $b^{12}=4^{12}\,e^{i2\pi}=4^{12}$ réel

d) $|q|=\dfrac{CA}{CB}$ et $\arg q=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)\ [2\pi]$

$$q=\frac{-2\sqrt{3}-2i}{-2\sqrt{3}+2i}=\frac{(-2\sqrt{3}-2i)^2}{(-2\sqrt{3})^2-(2i)^2}=\frac{12+8i\sqrt{3}-4}{16}=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Ainsi, $\dfrac{CA}{CB}=1$. Donc CA=CB.

Et $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Le triangle ABC est isocèle avec un angle de $\dfrac{\pi}{3}$ radian, il est donc équilatéral.

<u>Ex 2 :</u>

Partie A :

On pose z=x+iy avec x et y réels.

On veut montrer que $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$

$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$ et $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{x+iy}{x^2+y^2}$

Or $\overline{z}$=x-iy, d'où $\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{1}{x-iy}=\dfrac{x+iy}{x^2+y^2}$

Ainsi $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$

Partie B :

1°) **Faux.** Toute fonction f de la forme $f(x)=k\,e^x$ avec k réel est telle que $f'(x)=f(x)$

En particulier la dérivée de la fonction nulle est elle-même.

Remarque : La fonction exponentielle est la seule solution de $f'=f$ avec la condition $f(0)=1$.

2°) **Vrai.**

$i(x+iy)=-y+ix$

On a bien Re(z)=x=Im(iz).

3°) **Faux.**

$u_n=1-\dfrac{1}{n+1}$. (u_n) strictement croissante mais $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

4°) a) **Vrai**

Soit (v_n) suite arithmétique de raison r.

$u_{n+1}=e^{-v_{n+1}}=e^{-v_n-r}=e^{-v_n}\times e^{-r}=u_n\times q$

Ainsi, (u_n) est géométrique de raison $q=e^{-r}$

b) **Faux.**

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}-v_n=-\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}e^{-v_n}=0$. C'est à dire (u_n) converge vers 0.

c) Vrai

Avec le théorème des gendarmes : $-1\leq \sin(n)\leq 1$ donc $-1/(n+1)\leq -V_n\leq 1/(n+1)$ d'où
$e^{-1/(n+1)}\leq U_n\leq e^{1/(n+1)}$ U_n est encadrée par deux suites qui convergent vers 1.

Ex 3 :

Partie A

1° y'-2y=0 a pour solution $y=ke^{2x}$

2° a) si u est solution de l'équation 1 alors $u'(x)-2u(x)=xe^x$ or u'(x) = $ae^x+(ax+b)e^x$ on obtient donc

$$ae^x+(ax+b)e^x-2(ax+b)e^x=xe^x \Leftrightarrow a+ax+b-2ax-2b=x \Leftrightarrow \begin{cases}-a=1\\ a-b=0\end{cases}$$ donc a=-1 et b=-1

donc $u(x)=(-x-1)e^x$

b) u + v est solution de l'équation (1) ⇔ $(u+v)'-2(u+v)=xe^x$ ⇔ $u'+v'-2u-2v=xe^x$ ⇔ v'-2v=0

⇔ v est solution de l'équation différentielle (2)

c) l'ensemble des solutions de l'équation (1) c'est u(x)+v(x) = f(x) donc $ke^{2x}-(x+1)e^x$ = f(x)

3° La solution de l'équation (1) qui s'annule en 0. g(0)=0 ⇔ $ke^0-(0+1)e^0=0$ ⇔ k-1=0 ⇔ k=1

donc f(x) = $e^{2x}-(x+1)e^x$

Partie B

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$, puis celle en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x-x-2=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x-x-2=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2\frac{e^x}{x}-1-\frac{2}{x}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

2. g'(x)= $2e^x-1$ et $2e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>\frac{1}{2} \Leftrightarrow x>\ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x>-\ln(2)$

Le tableau de variation de g est : $g(-\ln(2))=2e^{\ln\frac{1}{2}}-\ln 2-2$ = ln(2)-1 (<0)

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	ln(2)-1	↗	$+\infty$

3) sur $]-\infty; -\ln(2)]$ g est continue comme somme de fonctions continues, g est strictement décroissante de plus comme $0 \in [g(-\ln(2)) ; +\infty[$ il existe une et une seule solution α à l'équation g(x)=0 sur $]-\infty; -\ln(2)]$.

De même sur $[-\ln(2) ; +\infty[$ g est continue comme somme de fonctions continues, g est strictement croissante

de plus comme $0 \in [g(-\ln(2)) ; +\infty[$ il existe une et une seule solution β à l'équation g(x)=0 sur $[-\ln(2) ; +\infty[$

On peut remarquer que g(0)= $2e^0-0-2=0$ et comme $0\in[-\ln(2) ; +\infty[$ alors $\beta=0$

g(-1,5)>0 et g(-1,6)<0 donc -1,6< α <-1,5.

4)

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie C

$f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$

1° $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-(x+1)e^x=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ cours

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-(x+1)e^x=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}-(x+1)e^x=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}\left(1-\frac{(x+1)}{e^x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ cours et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

2° $f'(x)=2e^{2x}-(1e^x+(x+1)e^x)=e^x(2e^x-1-(x+1))=e^x(2e^x-x-2)=e^x g(x)$

comme $e^x>0$ $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

g(α)=0 ⇔ $2e^{\alpha}-\alpha-2=0$ ⇔ $e^{\alpha}=\frac{(\alpha+2)}{2}$

$f(\alpha)=$ $e^{2\alpha}-(\alpha+1)e^{\alpha}$ = $(e^{\alpha})^2-(\alpha+1)e^{\alpha}$ = $\left(\frac{(\alpha+2)}{2}\right)^2-(\alpha+1)\frac{(\alpha+2)}{2}$ =

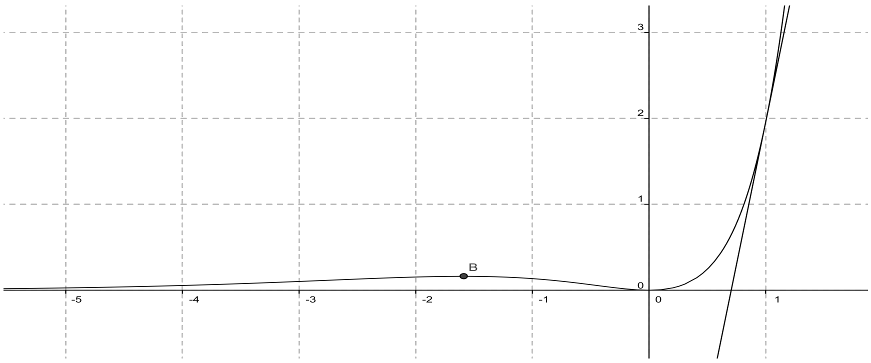
$\frac{(\alpha+2)}{2}\left(\frac{(\alpha+2)}{2}-(\alpha+1)\right)$

$\frac{(\alpha+2)}{2}\left(\frac{-\alpha}{2}\right)$ = $\frac{(-\alpha^2-2\alpha)}{4}$ = $-\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ cqfd

-1,5< α <-1,6 ⇔ -0,5 < α+1< -0,6 ⇔ $(-0{,}5)^2>(\alpha+1)^2>(-0{,}6)^2$ ⇔
$0{,}5^2-1>(\alpha+1)^2-1>0{,}6^2-1$

⇔ $-0{,}75>\alpha^2+2\alpha>-0{,}64$ ⇔ $\frac{-0{,}75}{4}<\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}<\frac{-0{,}64}{4}$ ⇔ 0,1875> $-\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ >0,16

équation de (T) tangente à C_f au point d'abscisse 1
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$
or $f'(1)=2e^2-e-2e$ = $2e^2-3e$
$f(1)=e^2-2e$
$y=(2e^2-3e)(x-1)+e^2-2e$ = $(2e^2-3e)x-e^2+e$



Partie D

1° $h(x)=xe^x$ donc $h'(x)=1e^x+xe^x$ = $(1+x)e^x$

2° F(x) = $\frac{1}{2}e^{2x}-xe^x$ +k comme F(0)=3 on obtient $\frac{1}{2}e^0-0e^0+k=3$ donc k=2,5

et F(x)= $\frac{1}{2}e^{2x}-xe^x+\frac{5}{2}$