TS . 2012/2013. Lycée Prévert. Corrigé du contrôle n°3. Durée : 3 heures. Mardi 20/11/12

Exercice 1 : (6,5 pts)

Première partie : Démonstration à rédiger

Démontrer que **si** (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : $\begin{cases} u_n \leqslant v_n, & \text{à partir d'un certain rang.} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Nous devons montrer que pour tout A réel aussi grand que l'on veut, il existe un rang, n_A , à partir duquel tous les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $]A;+\infty[$

Soit A>0 , aussi grand que l'on veut.
► Traduisons les hypothèses :

- **$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ donc il existe un rang n_1 tel que si $n \geqslant n_1$ alors $u_n \in]A;+\infty[$**
- **il existe un rang n_2 tel que si $n \geqslant n_2$ alors $u_n \leqslant v_n$**

► Choisissons le plus grand des deux rangs : $n_A = max\{n_1, n_2\}$, nous obtenons:
Si $n \geqslant n_A$, alors $v_n \geqslant u_n > A$ donc $v_n \in]A;+\infty[$.
► Nous avons trouvé , pour tout A réel aussi grand que l'on veut, un rang, n_A , à partir duquel tous les termes de la suite (v_n) appartiennent à l'intervalle $]A;+\infty[$.
Par définition, nous pouvons conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Deuxième partie : Connaissance du cours
Recopier et compléter les phrases suivantes :
Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire, de probabilités non nulles.

- $p(A\cup B) \neq p(A)+p(B)$ **sauf si A et B sont disjoints (ou incompatibles, c'est à dire $A\cap B = \emptyset$)**

En effet, $p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

- $p(A\cap B) \neq p(A)\times p(B)$ **sauf si A et B sont indépendants (voir définition de l'indépendance)**

En effet $p(A\cap B) = P(A)\times p_A(B)$

- $p(A\cap B) \neq p_A(B)$ **sauf si** $p(A)=1$

En effet $p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

Troisième partie : Vrai-Faux à justifier
Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse.
1 : Soit (u_n) une suite de nombres réels de terme général u_n

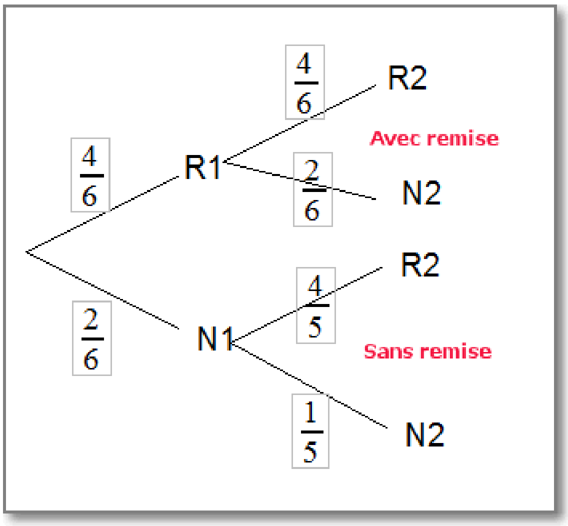
1. a) Si (u_n) est positive et strictement croissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **Faux . Contre -exemple :** **Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2-\dfrac{1}{n+1}$.** **Cette suite est positive car , pour tout $n \in \mathbb{N}$,** **$u_n = 2-\dfrac{1}{n+1} > 0$ (*à vérifier*), strictement croissante car $u_{n+1}-u_n > 0$ (*à vérifier*) et convergente vers 2**	1. b) Si (u_n) est monotone et bornée alors elle est convergente. **Vrai.** **Une suite bornée est une suite à la fois minorée et majorée.** **Si *u* est croissante, elle est croissante et majorée donc convergente d'après le cours.** **Si *u* est décroissante, elle est décroissante et minorée donc convergente d'après le cours.**

2 : Soient (v_n) et (w_n) deux suites de nombres réels de termes généraux v_n et w_n

2. a) Si la suite $(v_n w_n)$ diverge alors les suites (v_n) et (w_n) divergent **Faux.** **On considère les suites (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $v_n=(n+1)^2$ et $w_n=\frac{1}{n+1}$** **Le produit $v_n w_n=n+1$ donc $(v_n w_n)$ diverge, mais (w_n) converge vers 0**	2. b) Si pour tout n, $v_n \leqslant w_n$ et si (w_n) est décroissante alors (v_n) est majorée **Vrai : (v_n) est majorée par w_0.** **En effet la suite décroissante (w_n) est majorée par son premier terme w_0 donc pour tout n , $v_n \leqslant w_n \leqslant w_0$**

Exercice 2 : (6,5 pts). Probabilités . Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.
On prélève au hasard une boule de l'urne.
Si elle est rouge, on la remet dans l'urne et on prélève au hasard une seconde boule.
Si la première boule est noire, on prélève au hasard une seconde boule dans l'urne sans remettre la première boule tirée.
a. Faire un arbre pondéré illlustrant l'énoncé
b. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient rouges ?
c. Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit noire.
d. Calculer la probabilité que la première boule soit rouge sachant que la seconde est noire.



b) $p(R_1 \cap R_2)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

c) $p(N_2)=p(R_1 \cap N_2)+p(N_1 \cap N_2)$ $=$ $\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{13}{45}$

d) $p_{N_2}(R_1)=\frac{p(R_1 \cap N_2)}{p(N_2)}$ $=$ $\frac{\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}}{\frac{13}{45}}=\frac{10}{13}$

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Une urne contient quatre boules rouges et n boules noires indiscernables au toucher.
On prélève successivement et au hasard quatre boules de l'urne **en remettant dans l'urne** la boule tirée après chaque tirage.
Soit la variable aléatoire X donnant le nombre de boules rouges tirées au cours de ces quatre tirages.
a. Quelle est la nature de la loi de probabilité suivie par X ? Donner ses paramètres.

L'énoncé décrit un schéma de Bernoulli avec 4 répétitions d'une épreuve de Bernoulli à deux issues , le succès étant « tirer une boule rouge » avec une probabilité $p=\frac{4}{n+4}$, l'échec « tirer une boule noire »

La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès au cours des 4 tirages suit la loi binomiale $B\left(4\,;\frac{4}{n+4}\right)$

b. Démontrer que la probabilité q_n que l'une au moins des quatre boules tirées soit noire est telle que $q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$.

L'évènement contraire de l'événement « l'une au moins des quatre boules tirées est noire » est l'événement « Les quatre boules tirées sont rouges» dont la probabilité est :

$$p(X=4) = \binom{4}{4}\left(\frac{4}{n+4}\right)^4 = \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$$

Or pour tout événement A **, la probabilité de l'événement contraire est** $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ **donc**

$$q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$$

c. Écrire en langage naturel un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier naturel *n* pour lequel la probabilité q_n est supérieure ou égale à $0{,}9999$ puis utiliser la calculatrice pour déterminer cet entier.

Un exemple d'algorithme pouvant convenir (il y en a bien d'autres):

Initialisation : N prend la valeur 1
Q prend la valeur $1 - \left(\frac{4}{N+4}\right)^4$
Traitement : Tant que Q < 0,9999, faire :
N prend la valeur N+1
Q prend la valeur $1 - \left(\frac{4}{N+4}\right)^4$
Sortie : Afficher N

La calculatrice nous donne N = 36.

Il faut qu'il y ait au moins 36 boules noires dans l'urne pour que la probabilité de l'événement « l'une au moins des quatre boules tirées est noire » soit proche de 1 (supérieure à 0,9999)

Exercice 3: (7 pts).

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur ℕ par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel *n*, $u_n > 0$.

Remarque : cela se démontre par une récurrence immédiate

1. On désigne par *f* la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞ [par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$.

Étudier les variations de la fonction *f* et démontrer que la fonction *f* admet un minimum que l'on précisera.

f **est une fonction dérivable sur]0 ; +∞ [:** $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-7}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})}{x^2}\right)$

Sur]0 ; +∞ [, $\frac{1}{2} > 0$ **;** $x^2 > 0$ **;** $x + \sqrt{7} > 0$ **donc le signe de** $f'(x)$ **est celui de** $x - \sqrt{7}$**.**

$x - \sqrt{7} \geqslant 0$ **équivaut à** $x \geqslant \sqrt{7}$**. Nous pouvons donc dresser le tableau de variation de *f* sur]0 ; +∞ [.**

x	0	$\sqrt{7}$	$+\infty$	**Justifications et calculs**
Signe de f '(x)	$-$	0	$+$	Le calcul des limites n'était pas demandé. Calcul du minimum $f(\sqrt{7})$
Variations de f	$+\infty$ ↘	$f(\sqrt{7})$	↗ $+\infty$	$f(\sqrt{7}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{7} + \frac{7}{\sqrt{7}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{7}+7}{\sqrt{7}}\right)$ $= \frac{1}{2}\left(\frac{14}{\sqrt{7}}\right) = \frac{7}{\sqrt{7}} = \sqrt{7}$

Le minimum de f **est donc** $\sqrt{7}$ **atteint pour cette même valeur** $\sqrt{7}$**.**
Le tableau nous indique que , pour tout x **réel strictement positif** $f(x) \geqslant \sqrt{7}$

En déduire que pour tout entier naturel *n*, $u_n \geqslant \sqrt{7}$.

Nous avons $u_0 = 3 > \sqrt{7}$ **et pour tout** $n \in \mathbb{N}$ **,** $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant \sqrt{7}$**, puisque** u_n **est un réel strictement positif donc pour tout entier naturel *n*,** $u_n \geqslant \sqrt{7}$ **.**

On pouvait rédiger aussi un rapide raisonnement par récurrence en utilisant la croissance de la fonction *f* sur $[\sqrt{7};+\infty[$

2. a. Soit *n* un entier naturel quelconque. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{7}{2u_n} - 2\frac{u_n}{2} = \frac{7}{2u_n} - \frac{u_n}{2} = \frac{7-u_n^2}{2u_n}.$$

Or, pour tout entier naturel *n*, $u_n \geqslant \sqrt{7}$ **donc** $u_n^2 \geqslant 7$ **puisque la fonction carré respecte l'ordre sur les positifs.**

Donc $7 - u_n^2 \leqslant 0$ **et** $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ **(puisque le dénominateur** $2u_n$ **est strictement positif)**

La suite (u_n) **est donc décroissante.**

b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

La suite (u_n) **est décroissante et minorée par** $\sqrt{7}$ **donc elle converge vers une limite** $L \geqslant \sqrt{7}$

c. On déduit de la relation « $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right)$ » que la limite L de cette suite est telle que $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{7}{L}\right)$.

Déterminer L.

Résolvons l'équation $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{7}{L}\right)$, sachant que $L \geqslant \sqrt{7}$

Cette équation équivaut à $\frac{L}{2}=\frac{7}{2L}$ **qui équivaut à** $L^2=7$**. On exclut la solution négative** $-\sqrt{7}$ **et on peut donc conclure que** $L=\sqrt{7}$ **.**

3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\frac{(u_n-\sqrt{7})^2}{u_{n.}}$

Pour tout entier naturel ***n*** **:**

$$u_{n+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{7}{u_n}\right)-\sqrt{7}=\frac{1}{2}u_n+\frac{7}{2u_n}-2\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{u_n^2+7-2u_n\sqrt{7}}{2u_n}=\frac{(u_n-\sqrt{7})^2}{2u_n}$$

4. On définit la suite (d_n) par $\begin{cases} d_0=1 \\ d_{n+1}=\frac{1}{2}d_n^2, \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n-\sqrt{7}\leqslant d_n$.

Nous devons démontrer par récurrence que la proposition P_n **: «** $u_n-\sqrt{7}\leqslant d_n$ **. » est vraie pour tout entier naturel** ***n*** **.**

- **Initialisation : La proposition est-elle vraie au départ ?**
  P_0 **: «** $u_0-\sqrt{7}\leqslant d_0$ **» c'est à dire «** $3-\sqrt{7}\leqslant 1$ **»;** P_0 **est vraie car** $3-\sqrt{7}\approx 0{,}35<1$ **.**

- **Hérédité : La proposition se transmet-elle d'un rang à l'autre ?**
  Montrons que si la proposition est vraie pour un rang ***n*** **donné alors elle est vraie au rang suivant.**

Supposons que, pour un entier naturel ***n*** **donné,** $u_n-\sqrt{7}\leqslant d_n$ **, montrons que, alors,** $u_{n+1}-\sqrt{7}\leqslant d_{n+1}$

Hypothèse de récurrence **:** $u_n-\sqrt{7}\leqslant d_n$ **, on a même** $0\leqslant u_n-\sqrt{7}\leqslant d_n$ **puisque** $u_n\geqslant\sqrt{7}$

On en déduit en appliquant la fonction carré croissante sur les positifs :

$0\leqslant(u_n-\sqrt{7})^2\leqslant(d_n)^2$ **puis on divise par** $2u_n$ **strictement positif**

$$0\leqslant\frac{(u_n-\sqrt{7})^2}{2u_n}\leqslant\frac{(d_n)^2}{2u_n}$$

On obtient $u_{n+1}-\sqrt{7}\leqslant\frac{d_{n+1}}{u_n}$ **or** $u_n\geqslant\sqrt{7}>1$ **donc** $\frac{1}{u_n}<1$ **donc** $\frac{d_{n+1}}{u_n}<d_{n+1}$ **(multiplication par** $d_{n+1}>0$ **)**

Finalement $u_{n+1}-\sqrt{7}\leqslant d_{n+1}$**. La proposition est bien héréditaire.**

- **Conclusion :**
  La proposition « $u_n-\sqrt{7}\leqslant d_n$ ***» est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc,*** **d'après l'axiome de récurrence,** ***elle est vraie pour tout entier naturel n.***

b. Voici un algorithme :

Variables : n et p sont des entiers naturels , d est un réel.

Entrée : Demander à l'utilisateur la valeur de p.

Initialisations : Affecter à d la valeur 1.

Affecter à n la valeur 0

Traitement : Tant que $d>10^{-p}$.

Affecter à d la valeur $0{,}5\,d^2$

Affecter à n la valeur $n+1$.

Sortie : Afficher n.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5. Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?

On peut en déduire $d_5 \leqslant 10^{-9}$

Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

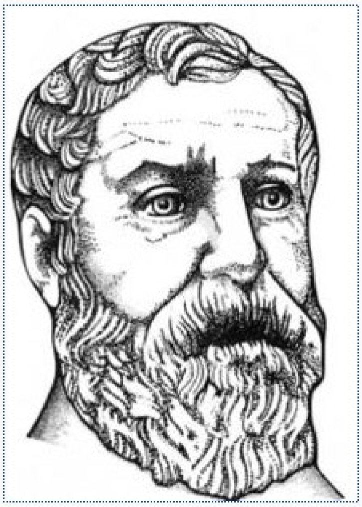
$0 \leqslant u_5 - \sqrt{7} \leqslant d_5 \leqslant 10^{-9}$ **;** u_5 **est donc bien une valeur approchée de** $\sqrt{7}$ **à** 10^{-9} **près.**

La convergence de la suite (u_n) **vers sa limite** $\sqrt{7}$ **est donc très rapide !**

☺ Un peu d'histoire.

Cet exercice est un grand classique et date de très longtemps :

Héron d'Alexandrie



Naissance	Ier siècle après J.-C. Alexandrie (Égypte)
Domicile	Alexandrie
Champs	Mathématiques, mécanique
Renommé pour	Éolipyle, Formule de Héron

Voir sur le livre une approche historique de cet exercice : Méthode de Héron page 56

Une illustration géométrique :

Chez les mathématiciens grecs, extraire la racine carré de A c'est trouver le côté d' un carré dont l'aire soit A. En prenant un rectangle de côté arbitraire X et de même aire A, il est nécessaire que l'autre côté ait pour longueur $\frac{A}{X}$. Mais ce rectangle n'est pas carré (en général). Pour le rendre *de plus en plus carré* , il suffit de prendre un rectangle dont la longueur est la moyenne arithmétique des deux côtés précédents soit $\frac{1}{2}\left(X + \frac{A}{X}\right)$ et dont l'aire reste A.

En réitérant indéfiniment le processus, on transforme petit à petit le rectangle en carré de même aire A et le coté obtenu donne très rapidement une bonne approximation de $\sqrt{A}$

http://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_H%C3%A9ron