Ex 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x-1}{3-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+3x-1}{3-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

comme $\lim_{x\to 3} x^2+3x-1 = 17$ et que $\lim_{x\to 3^-} 3-x = 0^+$ et $\lim_{x\to 3^+} 3-x = 0^-$

$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+3x-1}{3-x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+3x-1}{3-x} = -\infty$

et donc la courbe de f possède une asymptote verticale d'équation x=3.

2) f(0)= $\frac{-1}{3}$ donc A(0; $\frac{-1}{3}$) est le point d'intersection de la courbe de f et de l'axe Oy

f(x) = 0 ⇔ $x^2+3x-1=0$ et 3-x ≠ 0

Δ = 9 + 4 =13 donc deux solutions $x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}$

B($\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$; 0) et C ($\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$; 0) sont les points d'intersection avec l'axe Ox.

3) pour déterminer le signe de f on fait un tableau de signes

x	$-\infty$		x_2		x_1		3		$+\infty$
Signe de x^2+3x-1		+	0	−	0	+	||	+	
Signe de 3-x		+		+		+	||	-	
Signe de f(x)		+	0	-	0	+	||	-	

4) $ax+b+\frac{c}{3-x}$. $= \frac{(ax+b)(3-x)+c}{3-x} = \frac{-ax^2-bx+3ax+3b+c}{3-x} = \frac{-ax^2+(3a-b)x+(3b+c)}{3-x} = \frac{x^2+3x-1}{3-x}$

$\begin{cases} -a=1 \\ 3a-b=3 \\ 3b+c=-1 \end{cases}$ ⇔ a=-1 ; b=-6 et c = 17 donc f(x) = $-x-6+\frac{17}{3-x}$

5) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-x-6) = \lim_{x\to+\infty} \frac{17}{3-x} = 0$ car $\lim_{x\to+\infty} 3-x = -\infty$

de même $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x-6) = \lim_{x\to-\infty} \frac{17}{3-x} = 0$

donc la droite d'équation y = – x – 6 est asymptote à la courbe représentative de f *vers* +∞ et vers - ∞

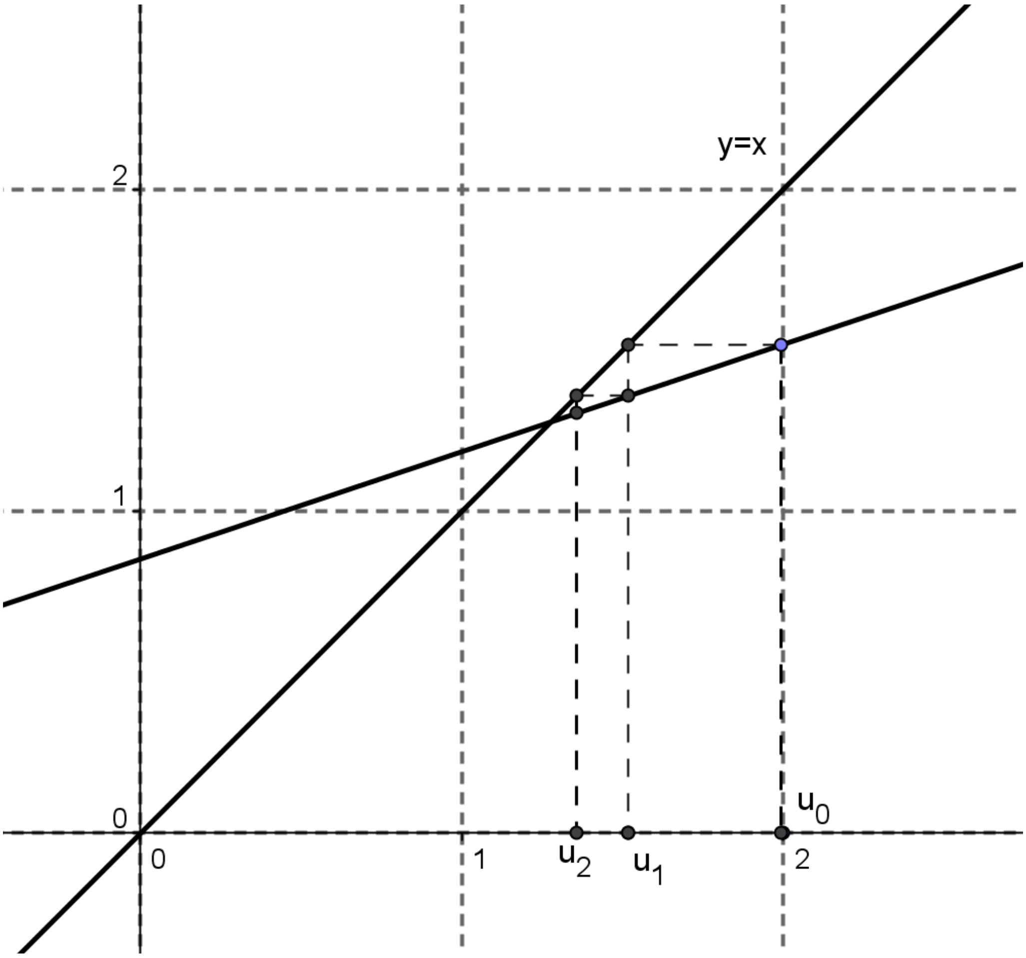
6) $f(x)-(-x-6)=\frac{17}{3-x}$ > 0 si $3-x>0$ ⇔ $x<3$

donc la courbe de f est au-dessus de (d) si x∈]−∞;3[

$f(x)-(-x-6)$ < 0 si $3-x<0$ donc la courbe de f est sous la droite (d) si x∈]3;+∞[

Ex 2 :

1°)



2°) Il semblerait que la suite (u_n) converge vers environ 1,3.

3°) a) $v_n = u_n - \frac{23}{18}$

D'où $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{23}{18} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} - \frac{23}{18} = \frac{1}{3}\left(v_n + \frac{23}{18}\right) + \frac{23}{27} - \frac{23}{18} = \frac{1}{3}v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Pour tout n entier naturel, $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n v_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{13}{18}$

Et $u_n = v_n + \frac{23}{18} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{13}{18} + \frac{23}{18}$

b) Initialisation :

Pour $n = 0$: $u_0 = 2$ et $\frac{13}{18} \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{23}{18} = \frac{36}{18} = 2$. La formule est vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

H) On suppose que pour un certain entier naturel n, $u_n = \frac{13}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{23}{18}$

C) Montrons que $u_{n+1} = \frac{13}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{23}{18}$

Dem :

$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27} = \frac{1}{3}\left(\frac{13}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{23}{18}\right) + \frac{23}{27}$ d'après H).

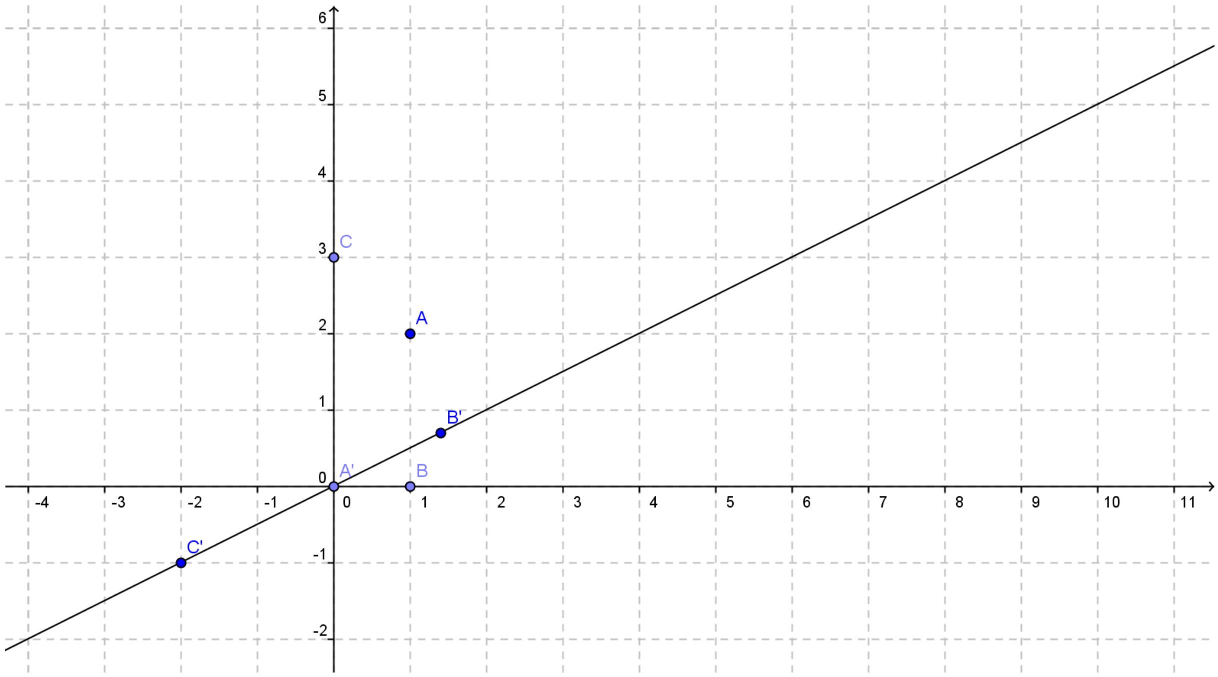
D'où $u_{n+1} = \frac{13}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{23}{54} + \frac{23}{27} = \frac{13}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{23}{18}$ cqfd

4°) $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{23}{18}$

Ex 3 :

1°) $z_{A'} = \frac{1}{6}\left((3+4i)(1+2i)+5(1-2i)\right) = \frac{1}{6}(3+10i-8+5-10i) = 0$

$z_{B'} = \frac{4}{3}+\frac{2}{3}i$ et $z_{C'} = -2-i$



2°) On pose $z = x+iy$

$z' = \frac{1}{6}\left((3+4i)(x+iy)+5(x-iy)\right) \ = \frac{1}{6}(3x-4y+4ix+3iy+5x-5iy)$

$= \frac{1}{6}(8x-4y+i(4x-2y))$

$= \frac{1}{3}(4x-2y+i(2x-y))$

3°) M = M' $\Leftrightarrow$ z=z' $\Leftrightarrow$ $x+iy = = \frac{1}{3}(4x-2y+i(2x-y))$

$\Leftrightarrow \ 3x+3iy = 4x-2y+i(2x-y)$

$\Leftrightarrow \ x-2y+i(2x-4y) = 0$

$\Leftrightarrow \ x-2y = 0$ et $2x-4y = 0$

$\Leftrightarrow \ y = 0{,}5x$

L'ensemble des points invariants est la droite (D) d'équation y = 0,5x.

4) Si M est un point quelconque du plan, M' a une affixe telle que Im(z') = 0,5 Re(z') (4x-2y =2(2x-y)) donc les points M' (x' ;y') ont des coordonnées telles que y' = 0,5x' qui est l'équation de la droite (D). Les points M' sont donc des points de (D).

Ex 4 :

Vrai ou faux :

1°) Avec $f(x) = 2x$ et $g(x) = x$, on a bien $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Donc Faux.

2°) Vrai $i^2 = -1$ donc $i^4 = (-1)^2 = 1$ et $i^{4n} = (i^4)^n = 1^n = 1$

3°) Faux ! En considérant la suite géométrique de raison i, on obtient que la somme des 200 premiers termes est égale à $(1-i^{200})/(1-i) = 0$ car $i^{200} = i^{4\times 50} = 1$

4°) $x^4 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow \ (x^2-4)(x^2+4) = 0$

$\Leftrightarrow \ x^2 = 4$ ou $x^2 = -4 = (2i)^2$

$\Leftrightarrow \ x = 2$ ou $x = -2$ ou $x = 2i$ ou $x = -2i$ Donc Vrai