Ex 1 : ROC

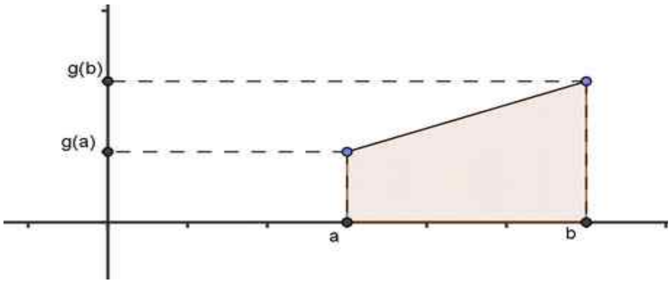
1°) La fonction densité associée à X de loi uniforme sur [a ; b] est la fonction *f* définie par :

$f(x)=\frac{1}{b-a}$ sur [a ; b]

$f(x)=0$ partout ailleurs.

2°) E(X) est l'aire sous la courbe de la fonction g définie par $g(x)=\frac{x}{b-a}$.

D'après le schéma ci-dessous, c'est l'aire d'un trapèze .

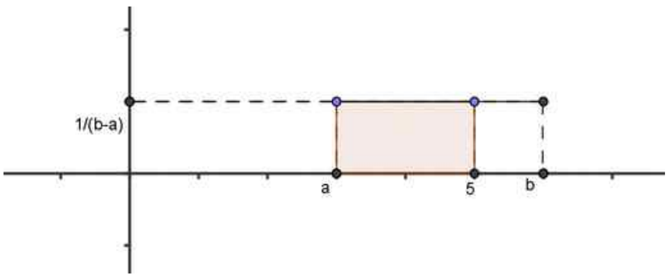


Ainsi :

$$E(X)=\frac{g(a)+g(b)}{2}\times(b-a)=(\frac{a}{b-a}+\frac{b}{b-a})\times\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{b-a}\times\frac{(b-a)}{2}=\frac{a+b}{2}$$

3°) D'après l'énoncé E(X) = 8 et $p(X\leq 5)=0{,}25$

Or, pour X de loi uniforme, d'après le schéma,



l'aire du rectangle colorée est $p(X\leq 5)=\frac{5-a}{b-a}$.

Ainsi, $\frac{a+b}{2}=8$ et $\frac{5-a}{b-a}=0{,}25$

La 1° équation donne $b=16-a$

Dans la 2° : $\frac{5-a}{16-2a}=0{,}25$

qui, pour $a\neq 8$ est équivalente à $5-a=4-0{,}5a$

Ainsi, *0,5a=1*

Et donc, *a = 2*

D'où *b = 14*

Le temps d'attente suit une loi uniforme sur [2 ; 14].

Ex 2 :

1°) $\ln(x)+\ln(x+1)=\ln(2)$

Domaine de définition : $]0\,;+\infty[$

$\ln(x)+\ln(x+1)=\ln(2)\Leftrightarrow \ln(x(x+1))=\ln(2)$

La fonction ln étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, c'est équivalent à

$x(x+1)=2$

$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=1\; ou\; x=-2$

- 2 ne faisant pas partie du domaine de définition, la seule solution est bien 1.

VRAI

2°) On pose $u_n=n^2\; et\; v_n=\dfrac{1}{n}$

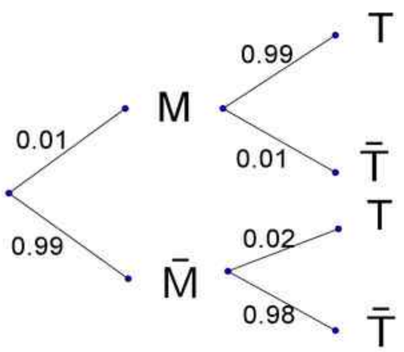
On a $u_n\times v_n=n$ ce qui diverge mais la suite (v_n) converge vers 0.

FAUX

3°) $z_1^2=(2+3i)^2=4+12i-9=-5+12i$ et $\bar{z}_2=4i$

Ainsi, $\dfrac{z_1^2}{\bar{z}_2}=\dfrac{-5+12i}{4i}=\dfrac{(-5+12i)\times i}{4i^2}=\dfrac{-5i-12}{-4}=3+\dfrac{5}{4}i$ Donc FAUX

4°) D'après l'énoncé :



$p(T)=p(T\cap M)+p(T\cap \bar{M})=0{,}99\times 0{,}01+0{,}02\times 0{,}99=0{,}99\times 0{,}03$

$p_T(\bar{M})=\dfrac{p(\bar{M}\cap T)}{p(T)}=\dfrac{0{,}02\times 0{,}99}{0{,}99\times 0{,}03}=\dfrac{2}{3}$

VRAI

Ex 3 :

C_2 est la courbe de g'.

En effet, quand C_2 est au dessus de l'axe des abscisses (et donc g' positif) , la fonction associée à C_1 est croissante.

Quand C_2 est au dessous de l'axe des abscisses (et donc g' négatif) , la fonction associée à C_1 est décroissante.

Mais, ce n'est pas le cas si on inverse les courbes.

$g(x)=(ax^2+bx+c)e^x$

$C(0\,;2)\in C_1$, on en déduit que $g(0)=2$
Or, $g(0)=c$ donc $c=2$.

Ainsi : $g(x)=(ax^2+bx+2)e^x$
$g'(x)=(2ax+b)e^x+(ax^2+bx+2)e^x=(ax^2+(b+2a)x+b+2)e^x$

$B(0\,;-1)\in C_2$ donc $g'(0)=-1$
Or, $g'(0)=b+2$ donc $b+2=-1$ et donc $b=-3$

Ainsi : $g'(x)=(ax^2+(2a-3)x-1)e^x$
$A(-1;0)\in C_2$ donc $g'(-1)=0$
Or, $g'(-1)=(2-a)e^{-1}$
$e^{-1}\neq 0$ donc, *a=2*

Finalement : $g(x)=(2x^2-3x+2)e^x$

<u>Ex 4 :</u>

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=2x^3-1+2\ln x$$

1. Variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

$$g'(x)=6x^2+\frac{2}{x}>0, \text{ car somme de nombres positifs sur }]0;+\infty[$$

La fonction g est donc croissante sur $]0;+\infty[$.
Tableau de variations :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	
$g(x)$	‖ $-\infty$	0	$+\infty$

2. *g* est continue (somme de fonctions continues) et strictement croissante sur] 0 ; $+\infty$ [.
$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Or, $0\in]-\infty\,;+\infty[$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation *g(x)=0* admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.

De plus, $g(0{,}86)\approx-0{,}0295$ et $g(0{,}87)\approx 0{,}0385$
Donc, $0{,}86<\alpha<0{,}87$

3. La fonction g étant strictement croissante,

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		-	0	+	

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=2x-\frac{\ln x}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. • Limite de la fonction f en 0 :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty,\text{car } \lim_{x\to 0^+} 2x=0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} -\ln x=+\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

Asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{lnx}{x}\times\frac{1}{x}\right)=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{lnx}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3. Dérivée $f'(x)$ de f :

$$f'(x)=2-\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{2x^4-x+2x\ln x}{x^4}=\frac{2x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$$

$f'(x)$ a même signe que $g(x)$ car x^3 est strictement positif sur $]0;+\infty[$.

4. Tableau de variations de la fonction f :

x	0		α	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	$+$		
Variation de f	$+\infty$		$f(\alpha)$	2	$+\infty$

5. $f(\alpha)=2\alpha-\frac{\ln\alpha}{\alpha^2}$

Or, $g(\alpha)=2\alpha^3-1+2\ln\alpha=0$

D'où $\ln\alpha=\frac{1}{2}-\alpha^3$

Ainsi, $f(\alpha)=2\alpha-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{2}-\alpha^3\right)=2\alpha-\frac{1}{2\alpha^2}+\alpha=3\alpha-\frac{1}{2\alpha^2}$

Ex 5 : *Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité Mathématiques*

1. (a) $u_1 = \frac{3\times u_0}{1+2u_0} = \frac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$

   et $u_2 = \frac{3\times u_1}{1+2u_1} = \frac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\frac{3}{4}} = \frac{9}{10}$.

   (b) — Pour tout entier naturel n, notons $\mathscr{P}_n$ la propriété : $0 < u_n$.
   — Initialisation : Si $n = 0$
   Alors $u_0 = \frac{1}{2} > 0$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   — Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie (c-à-d. $0 < u_k$). Montrons que $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie aussi (c-à-d. $0 < u_{k+1}$).
   Par hypothèse de récurrence $0 < u_k$ donc $0 < 3u_k$ et $0 < 1+2u_k$. ainsi, u_{k+1} est le quotient de deux nombres strictement positifs, donc $0 < u_{k+1}$ et $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

   — $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\mathscr{P}_n$ est héréditaire, par récurrence on a bien pour tout entier naturel $n, 0 < u_n$.

2. (a) Comme pour tout entier naturel $n, 0 < u_n$, pour étudier les variations de la suite, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{u_n} = \frac{3}{1+2u_n}$$

   Mais, $u_n < 1 \Leftrightarrow 2u_n < 2 \Leftrightarrow 1+2u_n < 3 \Leftrightarrow 1 < \frac{3}{1+2u_n}$ car $1+2u_n > 0$.

   Finalement la suite (u_n) est croissante.

   (b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 ; elle converge donc vers $\ell \leq 1$.

3. (a) Pour tout entier naturel n,

   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n$$

   La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3.

   (b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 q^n = 3^n$.

   (c) Pour tout entier naturel n,

   $v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow (1-u_n)v_n = u_n \Leftrightarrow v_n = u_n + u_n v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1+v_n} \Leftrightarrow$ $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

   (d) Comme $3 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. L'étude du quotient conduit donc à une forme indéterminée.

   $$u_n = \frac{3^n}{3^n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

   Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

   Par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1$, enfin, par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

   La suite (u_n) converge vers 1.

Ex 5 : *Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité Mathématiques*

Partie A :

Initialisation :

Pour *p=1*, $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6 & 3 & 3\\3 & 6 & 3\\3 & 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}=A$

Hérédité :

(H) On suppose que pour un certain entier *p* non nul, $A^p=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^p+2 & 4^p-1 & 4^p-1\\4^p-1 & 4^p+2 & 4^p-1\\4^p-1 & 4^p-1 & 4^p+2\end{pmatrix}$

(C) Montrons que $A^{p+1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^{p+1}+2 & 4^{p+1}-1 & 4^{p+1}-1\\4^{p+1}-1 & 4^{p+1}+2 & 4^{p+1}-1\\4^{p+1}-1 & 4^{p+1}-1 & 4^{p+1}+2\end{pmatrix}$

Dem :

$$A^{p+1}=A^p\times A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4^p+2 & 4^p-1 & 4^p-1\\4^p-1 & 4^p+2 & 4^p-1\\4^p-1 & 4^p-1 & 4^p+2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Le produit de la 1° ligne par la 1° colonne donne :

$$\frac{1}{3}(2\times(4^p+2)+4^p-1+4^p-1)=\frac{1}{3}(4\times4^p+2)=\frac{1}{3}(4^{p+1}+2)$$

De même pour les autres produits.

Conclusion : La formule est vraie pour $p=1$ et se transmet de termes à termes, elle est donc vraie pour tout *p* entier naturel non nul.

Partie B :

1°) a) $239=18\times13+5$ donc $239\equiv5[13]$
$239=14\times17+1$ donc $239\equiv1[17]$
239 est bien solution du système.

b) *N* solution du système.
$N\equiv5[13]$ donc *N – 5* est divisible par 13, c'est à dire *N – 5 = 13y* avec *y* un entier.
$N\equiv1[17]$ donc *N – 1* est divisible par 17, c'est à dire *N – 1 = 17x* avec *x* un entier.
Ainsi, *N = 5+13y=1+17x*
On a également, $17x-13y=5-1=4$

c) $17\times1-13\times1=4$
donc (1 ; 1) est une solution particulière de l'équation diophantienne (E) : $17x-13y=4$

$(x;y)$ un couple solution de (E)
$\Leftrightarrow 17x-13y=4=17\times1-13\times1$
$\Leftrightarrow 17(x-1)=13(y-1)$

17 divise $13(y-1)$ et 17 premier avec 13,
donc, par le théorème de Gauss, 17 divise $y-1$
Il existe *k* entier tel que $y-1=17k$, soit $y=1+17k$
En remplaçant, on obtient $x-1=13k$, soit $x=1+13k$

Réciproquement, $17(1+13k)-13(1+17k)=17-13=4$ donc les couples de cette forme sont bien

solutions.
D'où, l'ensemble des solutions de (E) est { $(1+13k\,;1+17k),k\in\mathbb{Z}$ }

d) D'après b) et c), N est de la forme $1+17(1+13k)=18+221k$ avec k un entier.

e) On vient de montrer que si $\begin{matrix} N\equiv 5[13] \\ N\equiv 1[17] \end{matrix}$ alors il existe k entier tel que $N=18+221k$
et donc $N\equiv 18[221]$

Réciproquement, si $N\equiv 18[221]$ alors il existe k entier tel que $N=18+221k$
Or, $18\equiv 5[13]$ et $221=17\times 13$, donc $221\equiv 0[13]$
Ainsi, $N\equiv 5[13]$
$18\equiv 1[17]$ et $221\equiv 0[17]$ donc $N\equiv 1[17]$

On a ainsi montré l'équivalence.

2°) Zoé possède N jetons, $600\leq N\leq 700$.
Si elle fait des tas de 13 jetons, il lui en reste 5 donc $N\equiv 5[13]$.
Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 1, donc $N\equiv 1[17]$.

D'après 1°)d), il existe k entier tel que $N=18+221k$.
$600\leq 18+221k\leq 700$ donne $\frac{582}{221}\leq k\leq \frac{682}{221}$ avec k entier.
Donc, $k=3$ et $N=18+221\times 3=681$.

Zoé possède 681 jetons.