TS Corrigé du devoir commun du 13/11/2015

Cours :

Soient A et B deux événement indépendants.
On compare $p(A\cap\bar{B})$ et $p(A)\times p(\bar{B})$
On sait que $p(A)=p(A\cap B)+p(A\cap\bar{B})$
D'où : $p(A\cap\bar{B})=p(A)-p(A\cap B)=P(A)-p(A)\times p(B)$ car A et B sont indépendants.
Ainsi : $p(A\cap\bar{B})=p(A)\times(1-p(B))=p(A)\times p(\bar{B})$
Alors, A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Vrai Faux :

a) On lance un dé équilibré, A = « Obtenir 1,2 ou 3 » et B= « Obtenir un chiffre pair »
$p(B)=p(A)=\frac{1}{2}$
On a bien $p(A)+p(B)=1$ mais A et B ne sont pas contraires.
FAUX

b) $\frac{1+2i}{3-i}=\frac{(1+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{1+7i}{10}$ donc FAUX

c) Le programme calcule les termes successifs de la suite (U_n) définie par
$U_0 = 0$ et $U_{n+1}=3U_n-2n+3$
$U_1=3$ (pour k = 0)
$U_2=3\times3-2\times1+3=10$ (pour k = 1)
$U_3=3\times10-2\times2+3=29$ (pour k = 2)
FAUX

Fonctions :

$g(x)=\frac{x^2+x-4}{x+3}$ sur I = $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$
1°) A l'aide du menu Table ou du menu Graph de la calculatrice, il semblerait que
g soit croissante sur] $-\infty;\approx-4,4$ [,
décroissante sur] $]-4,4;-3[$,
décroissante sur] $-3;\approx-1,6$ [,
croissante sur] $-1,6;+\infty$ [

2°) $g'(x)=\frac{(2x+1)(x+3)-(x^2+x-4)\times1}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+7}{(x+3)^2}$
$(x+3)^2>0$ sur I
donc $g'(x)$ est du signe de x^2+6x+7
$\Delta = 8$
2 racines : $x_1=\frac{-6-2\sqrt{2}}{2}=-3-\sqrt{2}$ et $x_2=-3+\sqrt{2}$

Le polynome est positif (signe de *a=1*) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.
D'où :

x	$-\infty$		x_1		-3		x_2		$+\infty$
Signe de *g'(x)*		+	0	-		-	0	+	
Variation de *g*		↗	-7,8	↘	||	↘	-2,2	↗	

3°) $g(0)=-\frac{4}{3}$ ainsi, le point d'intersection de C_g avec l'axe des ordonnées est $(0;-\frac{4}{3})$

$g(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-4=0$

Δ = 17

2 racines : $x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$, $x_{12}=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

2 points d'intersection avec l'axe des abscisses : $(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};0)$ et $(\frac{-1-\sqrt{17}}{2};0)$

Suites :

1°) $U_2=U_1-\frac{1}{4}U_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

2°) $U_2-U_1=\frac{1}{4}\, et\, U_1-U_0=\frac{3}{2}$ $U_2-U_1\neq U_1-U_0$ la suite n'est pas arithmétique (différence de termes consécutifs non constante)

$\frac{U_2}{U_1}=1{,}5$ et $\frac{U_1}{U_0}=-\frac{1}{2}$, le quotient de termes consécutifs n'est pas constant donc la suite n'est pas géométrique.

3°) a) $V_0=U_1-\frac{1}{2}U_0=1$

b) $V_{n+1}=U_{n+2}-\frac{1}{2}U_{n+1}=U_{n+1}-\frac{1}{4}U_n-\frac{1}{2}U_{n+1}=\frac{1}{2}U_{n+1}-\frac{1}{4}U_n=\frac{1}{2}(U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n)=\frac{1}{2}V_n$

La suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

4°) a) Pour tout *n* entier naturel, $W_{n+1}=\frac{U_{n+1}}{V_{n+1}}=\frac{V_n+\frac{1}{2}U_n}{\frac{1}{2}V_n}=\frac{2V_n+U_n}{V_n}$

tandis que $W_n+2=\frac{U_n}{V_n}+2=\frac{U_n+2V_n}{V_n}$

Ainsi, pour tout *n* entier naturel : $W_{n+1}=W_n+2$

b) On en déuit que la suite (W_n) est arithmétique de raison 2.

D'où, pour tout *n* entier naturel, $W_n=W_0+2n=-1+2n$

c) Il semble que la limite de la suite est $+\infty$

A un réel quelconque.

$W_n>A \Leftrightarrow -1+2n>A \Leftrightarrow n>\frac{A+1}{2}$

Soit $N=E(\frac{A+1}{2})+1$ où E désigne la fonction partie entière.

Pour tout n > N , $W_n>A$.

Autrement dit, à partir d'un certain rang N, tous les W_n sont dans $]A;+\infty[$

Cela traduit que la limite de la suite (W_n) est $+\infty$.

5°) Pour tout entier naturel *n*, $U_n=V_n\times W_n$

Or, la suite (V_n) est géométrique de raison 1/2 et de 1° terme V_0 = 1, d'où $V_n=(\frac{1}{2})^n=\frac{1}{2^n}$

Ainsi, $U_n=\frac{2n-1}{2^n}$

6°) <u>Initialisation :</u>

$S_0 = U_0 = -1$ et $2-\frac{3}{2^0}=2-3=-1$ La formule est vraie pour $n=0$.

<u>Hérédité :</u>

(H) On suppose que pour un certain entier naturel *p*, $S_p=2-\frac{2p+3}{2^p}$

(C) Montrons que la formule est vraie au rang *p + 1* , c'est à dire $S_{p+1}=2-\frac{2p+5}{2^{p+1}}$

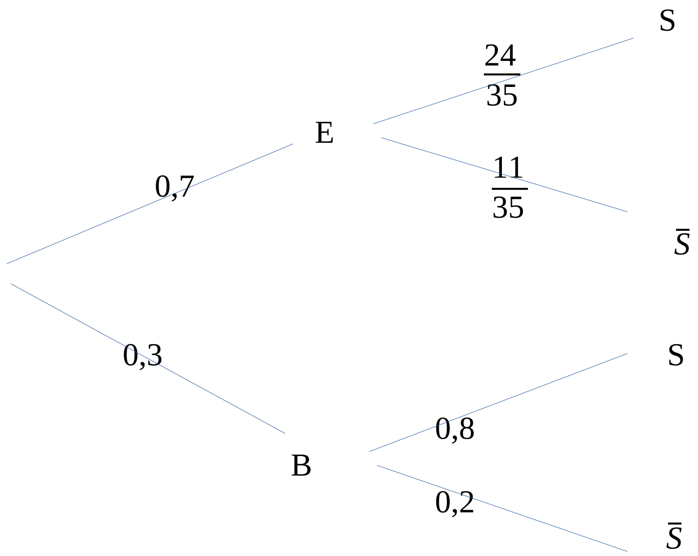
<u>Dem :</u>

$S_{p+1}=S_p+U_{p+1}=2-\frac{2p+3}{2^p}+\frac{2p+1}{2^{p+1}}=2-\frac{4p+6}{2^{p+1}}+\frac{2p+1}{2^{p+1}}=2-\frac{4p+6-2p-1}{2^{p+1}}=2-\frac{2p+5}{2^{p+1}}$ cqfd

La formule est vraie au rang 0 et elle se transmet d'un rang au suivant, donc pour tout *n* entier naturel $S_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$

<u>Probabilités :</u>

1°)



2°)

a) $B\cap S$ = « le client a choisi le Brésil et il est satisfait »

D'après l'arbre, $p(B\cap S)=p_B(S)\times p(B)=0{,}8\times 0{,}3=0{,}24$

b) $0{,}72=p(S)=p(B\cap S)+p(E\cap S)$

D'où, $p(E\cap S)=0{,}72-0{,}24=0{,}48$

c) $p_E(S)=p\frac{(E\cap S)}{p(E)}=\frac{0{,}48}{0{,}7}=\frac{24}{35}$

Ainsi, $p_E(\bar{S})=1-\frac{24}{35}=\frac{11}{35}$

On peut donc compléter l'arbre.

3°) Probabilité que le client ait choisi le Brésil sachant qu'il est satisfait =

$p_S(B)=p\frac{(B\cap S)}{p(S)}=\frac{0{,}24}{0{,}72}=\frac{1}{3}$