Question sur la leçon :
Dire que f est croissante sur un intervalle I
signifie que
pour tous a et b de I, $f(a)$ et $f(b)$ sont rangés dans le même ordre que a et b.

Vrai ou Faux :
1°) (d) a pour équation cartésienne : $2x-5y+1=0$
On peut en déduire les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ avec $a=2$ et $b=-5$

D'où, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{v}$ alors, $\vec{u}$ sera aussi un vecteur directeur de (d).
$-6\times2=-12$ et $-3\times5=-15$
Les produits en croix sont différents, les vecteurs ne sont pas colinéaires.
Donc, $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de (d). FAUX

2°) D'après la calculatrice, il semble que f ne soit pas croissante sur [0 ; $+\infty$ [.
On confirme par un calcul.
$f(0)=2$ et $f(1)=0$
On a $0<1$ mais $f(0)>f(1)$.
L'ordre n'est pas conservé. f n'est pas croissante sur [0 ; $+\infty$ [. FAUX

Ex 1 :
1°) a) a et b réels,
$f(a)-f(b)=2a^2-12a+17-(2b^2-12b+17)=2a^2-2b^2-12a+12b$
$= 2(a-b)(a+b)-12(a-b)$
$= 2(a-b)(a+b-6)$

b) $f(x)=2x^2-12x+17=2(x^2-6x+8{,}5)=2((x-3)^2-9+8{,}5)=2((x-3)^2-0{,}5)=2(x-3)^2-1$

2°) On suppose $a<b\leq3$
Comparons $f(a)$ et $f(b)$.
Pour cela étudions le signe de $f(a)-f(b)$ c'est à dire de $2(a-b)(a+b-6)$
$a<b$ donc $a-b<0$
De plus, $a<b\leq3$, donc $a+b<6$ et donc $a+b-6<0$
Ainsi, $f(a)-f(b)>0$ (produit de deux négatifs).
On a ainsi, $a<b\leq3$ et $f(a)>f(b)$, l'ordre est inversé.
La fonction f est décroissante sur] $-\infty$; 3].

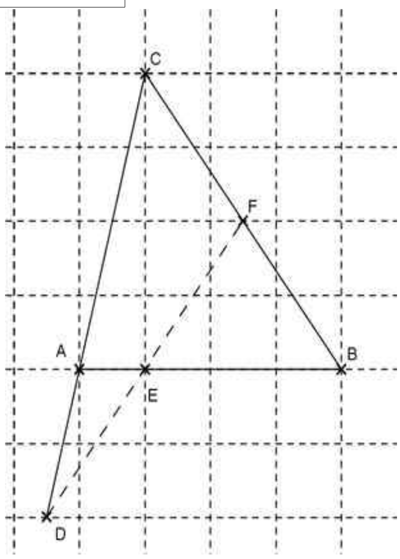
Autre méthode :
$a<b\leq3$
donc $a-3<b-3\leq0$
ainsi : $(a-3)^2>(b-3)^2$ car la fonction carrée est décroissante sur] $-\infty$; 0]
ce qui entraîne $2(a-3)^2>2(b-3)^2$
et finalement : $2(a-3)^2-1>2(b-3)^2-1$
C'est à dire $f(a)>f(b)$
L'ordre est inversé, la fonction f est décroissante sur] $-\infty$; 3].

Ex 2 :
1°) D a une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$
avec $-b=4$ et $a=5$ car $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$. D'où : $a=5$ et $b=-4$
D a donc une équation de la forme : $5x-4y+c=0$
Or, $A(2;3)$ est sur D. $5\times2-4\times3+c=0$ Ce qui donne $c=2$

Équation de D : $5x-4y+2=0$
Le point B a pour abscisse 8 et appartient à D, donc : $5\times 8-4y+2=0$
Donc, $-4y=-42$. On obtient $y_B=10{,}5$.

2°) Pour étudier les positions relatives de C_f et de C_g on étudie le signe de $f(x)-g(x)$ c'est à dire de $x^2+1-(-x^2+x+1)=2x^2-x=x(2x-1)$

x	$-\infty$		0		0,5		$+\infty$
Signe de x		-	0	+		+	
Signe de $2x-1$		-		-	0	+	
Signe de $f(x)-g(x)$		+	0	-	0	+	
Position		C_f dessus		C_f dessous		C_f dessus	



Ex 3 :
Partie A :

1) $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\vec{EF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\vec{DF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

3) Ainsi $\frac{1}{2}\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EF}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{DF}\, et\, \overrightarrow{EF}$ sont colinéaires donc les points D, E et F sont alignés.

Partie B :
On choisit de se placer dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

2) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

3) Donc les coordonnées des points D, E et F dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$) sont : D $(0;-\frac{1}{2})$; E $(\frac{1}{4};0)$; F $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$.

4) On a donc $\overrightarrow{DE}(\frac{1}{4};\frac{1}{2})$ et $\overrightarrow{DF}(\frac{1}{2};1)$. Ainsi on a $\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{DE}$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{DF}\, et\, \overrightarrow{DE}$ sont colinéaires, donc les points D,E et F sont alignés.

Problème :
On munit le plan d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soient m un réel, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires du plan tels que $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 4m \end{pmatrix}$.
Peuvent-ils être de même sens ?
Les vecteurs $\vec{u}\, et\, \vec{v}$ étant colinéaires, on a :

$\mathrm{m}\times 4\mathrm{m}-(-3)\times(-6)=0 \Leftrightarrow \mathrm{m}^2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow(\mathrm{m}=\frac{3}{\sqrt{2}}\text{ ou m}=\frac{-3}{\sqrt{2}})$

Pour la valeur $\mathrm{m}=\frac{-3}{\sqrt{2}}$, le coefficient k tel que $\vec{u}=k\times\vec{v}$ est positif et ainsi $\vec{u}\, et\, \vec{v}$ sont colinéaires et de même sens. En effet $k=\frac{\frac{-3}{\sqrt{2}}}{-6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$