CORRIGÉ DU DEVOIR COMMUN N° 3 DE MATHÉMATIQUES DES CLASSES DE SECONDES

EXERCICE 1 : (6 points). Une fonction et sa courbe représentative.

On considère la fonction f définie sur ℝ par l'expression algébrique $f(x)=2x^2-4x-6$.
On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Comment s'appelle ce type de fonction ? Comment nomme -t-on la courbe C_f ?

   Cette fonction est une fonction polynôme de degré 2 car son expression est de la forme ax^2+bx+c. Sa courbe représentative est une parabole.

2. Montrer que $f(x)=2(x-1)^2-8$. Comment s'appelle cette deuxième écriture de f ?

   On a : $2(x-1)^2-8=2(x^2-2x+1)-8=2x^2-4x+2-8=2x^2-4x-6=f(x)$. Donc on a bien $f(x)=2(x-1)^2-8$, cette deuxième écriture s'appelle la forme canonique de *f*.

3. A partir de l'écriture $f(x)=2(x-1)^2-8$ montrer que f peut s'écrire aussi $f(x)=2(x-3)(x+1)$.

   Comment s'appelle cette troisième écriture de f ?

   On a : $f(x)=2(x-1)^2-8=2[(x-1)^2-4]=2[(x-1)^2-2^2]=2[(x-1-2)(x-1+2)]=2(x-3)(x+1)$
   Donc on a bien : $f(x)=2(x-3)(x+1)$, qui est la forme factorisée de *f*.

4. A l'aide des trois expressions de *f*, donner toutes les informations que vous en déduisez sur la courbe C_f. Vous justifierez vos réponses.

♦ A partir de la première écriture de *f*, qui est la forme développée, on obtient que :

- **la courbe représentative de *f* est une parabole dont les branches sont tournées vers le haut car *a* (le coefficient de x^2) vaut 2, il est donc positif.**
- **la courbe coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ;– 6), en effet c = – 6 d'où $f(0)=-6$.**

♦ A partir, de la forme canonique, on obtient que :

- **le sommet S de la parabole a pour coordonnées (1 ;– 8)**

♦ A partir de la forme factorisée, on obtient que :

- **la courbe coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées (3 ; 0) et (–1 ; 0), en effet $f(x)=0$ équivaut à $x=3$ ou $x=-1$.(Règle du produit nul $A\times B=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$)**

5. Dresser le tableau de variation de f .

x	$-\infty$		1		$+\infty$	Justifications
Variations de f		↘	–8	↗		• Le sommet est S(1 ; –8). • a = 2 est positif donc *f* est d'abord décroissante sur $]-\infty;1]$ puis croissante sur $[1;+\infty[$

6. Dresser le tableau de signes de f avec toutes les justifications nécessaires.

   A l'aide de la forme factorisée on peut construire le tableau de signe suivant :

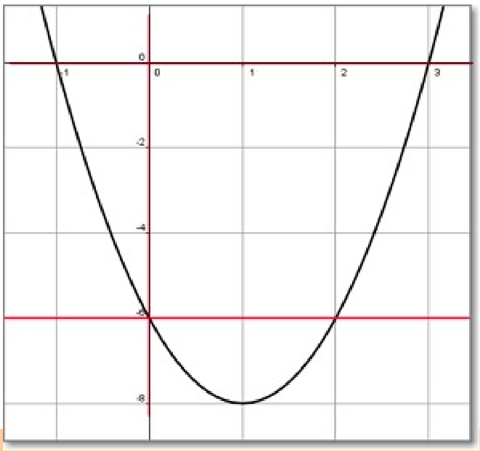
x	$-\infty$		–1		3		$+\infty$	Justifications
Signe de 2		+		+		+		2 est toujours positif
Signe de $x-3$		–		–	0	+		$ax+b$ est du signe de a à droite du zéro, ici $a=1$
Signe de $x+1$		–	0	+		+		$ax+b$ est du signe de a à droite du zéro, ici $a=1$
Signe de $f(x)$		+	0	–	0	+		

6. Résoudre $f(x)=-6$

Pour résoudre cette équation, on va utiliser la forme développée :

$$\begin{aligned} f(x)=-6 &\Leftrightarrow 2x^2-4x-6=-6 \\ &\Leftrightarrow 2x^2-4x=-6+6 \\ &\Leftrightarrow x(2x-4)=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } 2x-4=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=2 \end{aligned}$$

Donc l'équation $f(x)=-6$ a pour solution 0 et 2.
Tous les résultats peuvent être vérifiés sur le graphique ci-contre :



EXERCICE 2 : (5 points). Équations de droites et géométrie.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère les points A(–4 ; 3), $B\left(\frac{22}{3};5\right)$ et C(2 ; 7).

La figure est à compléter au fur et à mesure sur la feuille annexe.

1. Tracer la droite (d) d'équation $y=-x+4$. (vous expliquerez sur votre copie la méthode choisie).

Pour tracer une droite, deux points suffisent, voici un tableau de valeurs donnant les coordonnées de deux points de la droite (d) :

x	**0**	**6**
y	**4**	**–2**

2. Déterminer une équation de la droite (AC). Vos explications seront les plus précises possibles.

Comme les points A et C ont des abscisses différentes, la droite (AC) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et elle a donc une équation réduite du type : $y=ax+b$.

Pour calculer *a*, le coefficient directeur, on dispose de la formule suivante $a=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{7-3}{2-(-4)}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

On a donc (AC) : $y=\frac{2}{3}x+b$ **et pour calculer *b* : l'ordonnée à l'origine, on utilise le fait que le point C appartient à la droite (AC) et donc que ses coordonnées vérifient l'équation de la droite, d'où :**

$$y_C=\frac{2}{3}x_C+b$$
$$\text{donc } 7=\frac{2}{3}\times 2+b$$
$$\text{donc } b=7-\frac{4}{3}=\frac{17}{3}$$

La droite (AC) a pour équation réduite : $y=\frac{2}{3}x+\frac{17}{3}$

3. Justifier que les droites (d) et (AC) sont sécantes et déterminer par un calcul les coordonnées de leur point d'intersection I.

La droite (d) a pour coefficient directeur –1 et la droite (AC) a pour coefficient directeur $\frac{2}{3}$, elles sont donc sécantes. On peut calculer les coordonnées de leur point d'intersection en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} y=-x+4 \\ y=\frac{2}{3}x+\frac{17}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ -x+4=\frac{2}{3}x+\frac{17}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ -x-\frac{2}{3}x=\frac{17}{3}-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ \frac{-5}{3}x=\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ x=\dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{-5}{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ x=\frac{5}{3}\times\frac{-3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+4 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-(-1)+4 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=-1 \end{cases}$$

Donc le point d'intersection des deux droites a pour coordonnées (–1 ; 5).

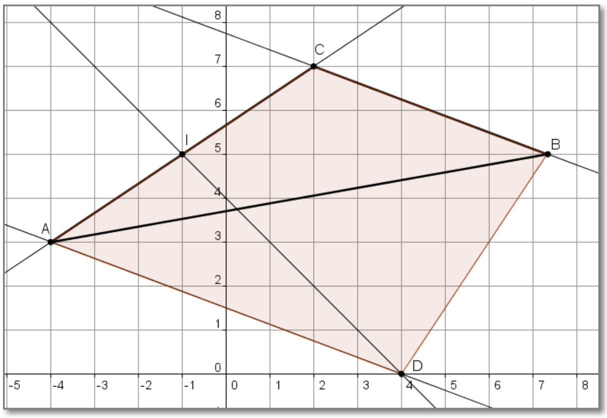
4. Montrer que I est le milieu de [AC].

Notons J le milieu de [AC] et calculons ses coordonnées : $x_J=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-4+2}{2}=\frac{-2}{2}=-1$ **et** $y_J=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3+7}{2}=\frac{10}{2}=5$ **. J a les mêmes coordonnées que I, on en déduit donc qu'ils sont confondus et donc que I est bien le milieu de [AC].**

5. Déterminer par un calcul les coordonnées de D point d'intersection de (d) avec l'axe des abscisses.

Le point D a pour ordonnée : 0, car il est situé sur l'axe des abscisses. De plus D est sur la droite (d) donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite, on a donc : $y_D=-x_D+4$ **d'où** $0=-x_D+4$ **d'où** $x_D=4$ **.**

Donc le point D a pour coordonnées (4 ; 0)



6. Montrer que ADBC est un trapèze.

Calculons les coordonnées des vecteurs $\vec{AD}$ **et** $\vec{CB}$ **, on a :**

$\vec{AD}\ (x_D-x_A\,;y_D-y_A)$ $\vec{AD}(4-(-4);0-3)$ $\vec{AD}(8\,;-3)$

$\vec{CB}(x_B-x_C\,;y_B-y_C)$ $\vec{CB}(\frac{22}{3}-2\,;5-7)$ $\vec{CB}(\frac{16}{3};-2)$

Coordonnées de $\vec{AD}$	8	–3
Coordonnées de $\vec{CB}$	$\frac{16}{3}$	–2

On a : $x_{\vec{AD}}\times y_{\vec{CB}}=8\times(-2)=-16$ **et** $y_{\vec{AD}}\times x_{\vec{CB}}=-3\times\frac{16}{3}=-16$ **.**

Ainsi on a vérifié que les vecteurs $\vec{AD}$ **et** $\vec{CB}$ **ont leurs coordonnées proportionnelles, ils sont donc colinéaires donc les droites (AD) et (CB) sont parallèles et donc ADBC est bien un trapèze.**

EXERCICE 3 : (6 points). Statistiques et probabilités.

En Floride un zoologiste a étudié les cent alligators d'un parc. Il a étudié leur taille et le sexe des individus. Les données sont représentées dans le tableau suivant :

Taille en m	**[3 ; 3,4[**	**[3,4 ; 3,8[**	**[3,8 ; 4,2[**	**[4,2 ; 4,6[**	**[4,6 ; 5[**
Mâles	**1**	**4**	**21**	**17**	**7**
Femelles	**9**	**16**	**23**	**2**	**0**

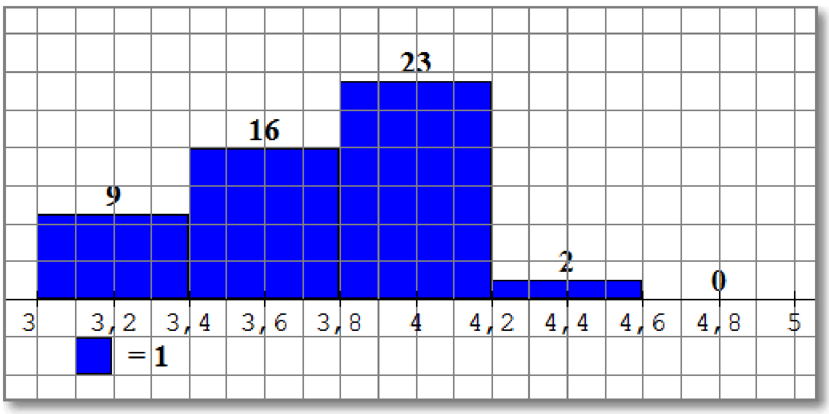
Partie 1 : Statistiques

1. Calculer la taille moyenne d'un alligator mâle.

On utilise le centre des classes pour calculer cette moyenne :

$\bar{x}=\frac{1\times3{,}2+4\times3{,}6+21\times4+17\times4{,}4+7\times4{,}8}{1+4+21+17+7}=\frac{210}{50}$ **= 4,2. La taille moyenne d'un alligator mâle est 4,2 m.**

2. Construire sur l'annexe l'histogramme des effectifs des alligators femelles.



3. Calculer la fréquence des alligators dont la taille appartient à l'intervalle [3,8 ; 4,2 [

Il y a 21 mâles et 23 femelles donc 44 alligators dont la taille appartient à l'intervalle [3,8 ; 4,2 [sur un total de 100 alligators. La fréquence est donc $\frac{44}{100} = 0{,}44$.

Autrement dit 44 % des alligators ont une taille comprise entre 3,8 m et 4,2 m

Partie 2 : Probabilités

On prélève au hasard un alligator du parc et on s'intéresse aux événements suivants :

M : « L'alligator prélevé est un mâle »

A : « L'alligator prélevé a une taille strictement inférieure à 4,2 m »

1. Calculer les probabilités $p(A)$ et $p(M)$

Il y a 50 mâles donc $p(M)=\frac{50}{100}=0{,}5$

Il y a 74 alligators ayant une taille strictement inférieure à 4,2 m donc $p(A)=\frac{74}{100}=0{,}74$

2. Décrire par une phrase l'événement $\overline{A}$ puis calculer $p(\overline{A})$

$\overline{A}$ **: « L'alligator prélevé a une taille supérieure ou égale à 4,2 m »**

$p(\overline{A})=1-p(A)$ = $1-0{,}74=0{,}26$

3. Décrire par une phrase l'événement $A\cap M$ puis calculer $p(A\cap M)$

$A\cap M$ **: « L'alligator prélevé est un mâle dont la taille est strictement inférieure à 4,2 m ».**

D'après le tableau il y 26 alligators mâles dont la taille est strictement inférieure à 4,2 m donc :

$p(A\cap M)=\frac{26}{100}=0{,}26$

4. Calculer $p(A\cup M)$

$p(A\cup M)=p(A)+p(M)-p(A\cap M)=0{,}74+0{,}5-0{,}26=0{,}98$

EXERCICE 4 AU CHOIX : (3 points). Algorithme

Voici deux algorithmes :

ALGORITHME 1	ALGORITHME 2

<u>ENTRÉE</u> :
SAISIR A, B, C (NOMBRES RÉELS)
<u>TRAITEMENT</u>:
`SI (A≤B) ALORS M PREND LA VALEUR A SINON M PREND LA VALEUR B`
`SI (C≤M) ALORS M PREND LA VALEUR C`
<u>SORTIE</u> :
AFFICHER M
	<u>ENTRÉE</u> :
	SAISIR A, B, C (NOMBRES RÉELS)
	<u>TRAITEMENT</u>:
	`SI (B≤A) ALORS P PREND LA VALEUR A SINON P PREND LA VALEUR B`
	`SI (P≤C) ALORS P PREND LA VALEUR C`
	<u>SORTIE</u> :
	`AFFICHER P`

1. Faire fonctionner ces algorithmes en entrant A = 3 , B = –1 et C = 27 , puis en faisant deux autres tests à votre initiative.

Présentez vos résultats dans un tableau identique à celui-ci :

	Entrée			Sortie pour l'algorithme 1	Sortie pour l'algorithme 2
	A	B	C	M	P
Premier test	**3**	**–1**	**27**	**–1**	**27**
Deuxième test	**–2**	**5**	**12**	**–2**	**12**
Troisième test	**4**	**6**	**0**	**0**	**6**

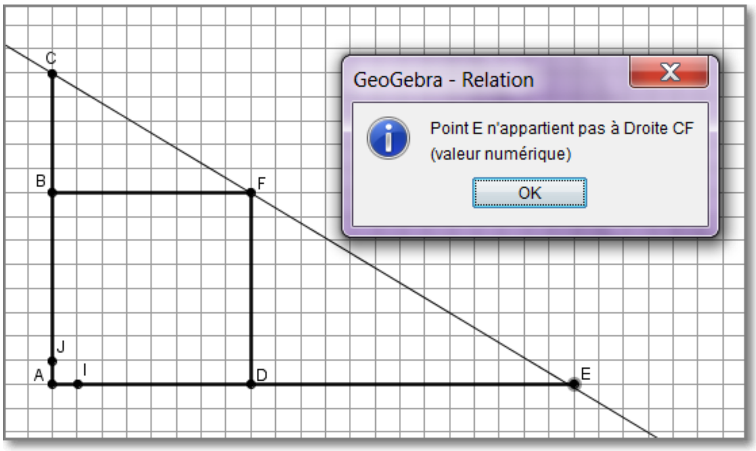
2. Quel est le but de chacun de ces algorithmes ?

L'algorithme 1 affiche le plus petit des 3 nombres.

L'algorithme 2 affiche le plus grand des 3 nombres.

EXERCICE 4 AU CHOIX : (3 points) prise d'initiative

Plusieurs méthodes sont envisageables pour résoudre l'exercice suivant.
Toute prise d'initiative plus ou moins aboutie sera prise en compte.
Dans la figure ci-contre, tous les angles sont droits.
AB = 8 ; AD = 8 ; BC = 5 et DE = 13.
Les points C, F et E sont-ils alignés ?



☺ Plusieurs méthodes sont envisageables , en voici quelques unes :

Méthode 1 : en utilisant le théorème de Thalès et un raisonnement par l'absurde :

Supposons que C, F et E sont alignés, alors , dans le triangle ACE, les droites (BF) et (AE) étant parallèles (car angles droits), le théorème de Thalès indique que $\frac{CB}{CA}=\frac{BF}{AE}$ **, c'est à dire** $\frac{5}{13}=\frac{8}{21}$ **or cette égalité est fausse car** $5\times21\neq13\times8$**, donc C, F et E ne sont pas alignés.**

Méthode 2 : en utilisant un repère et la colinéarité de deux vecteurs :
Soient I point du segment [AD] tel que AI=1
et J point du segment [AB] tel que AJ=1.
Dans le repère (A ; $\overrightarrow{AI}$ **;** $\overrightarrow{AJ}$**), le point C a pour coordonnées (0 ; 13), le point E (21 ; 0) et F (8 ; 8).**
Ainsi $\overrightarrow{CF}(8;-5)$ **et** $\overrightarrow{CE}(21;-13)$**.**
Les vecteurs $\overrightarrow{CF}$ **et** $\overrightarrow{CE}$ **sont-ils colinéaires ?**
$8\times(-13)=-104$ **et** $-5\times(21)=-105$ **or** $-104\neq-105$**.**

Donc $\overrightarrow{CF}$ **et** $\overrightarrow{CE}$ **ne sont pas colinéaires et les points C, F et E ne sont pas alignés.**

Méthode 3 : en utilisant un repère et l'équation réduite de la droite (CF) :
On détermine une équation de la droite (CF) et on teste l'appartenance de E à cette droite.

Certains ont utilisé le théorème de Pythagore, c'était possible aussi mais la rédaction était plus délicate puisqu'il fallait comparer des nombres comportant des racines carrées : comparer CE et CF +FE