

## Corrigé du devoir commun de Mathématiques des SECONDES

### EXERCICE 1 : ( 5 points). Savoirs et savoirs - faire de base.

a) Donner le tableau de signe de l'expression  $-4x+7$  en expliquant la méthode utilisée.

**Le signe de  $-4x+7$  dépend de la valeur de  $x$  :**

$$-4x+7 > 0$$

$$-4x > -7$$

$$4x < 7$$

$$x < \frac{7}{4}$$

**Attention ! L'ordre change car on a multiplié chaque membre de l'inégalité par  $-1$**

**Donc lorsque  $x$  est strictement inférieur à  $\frac{7}{4}$ ,  $-4x+7$  est strictement positif .**

$$-4x+7 < 0$$

$$-4x < -7$$

$$4x > 7$$

$$x > \frac{7}{4}$$

$$-4x+7 = 0$$

$$-4x = -7$$

$$4x = 7$$

$$x = \frac{7}{4}$$

**On fait de même**

**On résume ces résultats dans un tableau , appelé tableau de signes :**

$x$	$-\infty$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$	Pour vérifier !
<i>Signe de <math>-4x+7</math></i>	+	0	-	On sait que $-4x+7$ est du signe de $-4$ « à droite du zéro »

b) Expliquer ce que signifie « valeur interdite »

**Une valeur interdite est une valeur de la variable  $x$  qui rend impossible le calcul d'une expression algébrique dépendant de  $x$  .**

**Deux exemples :**

- l'expression  $\frac{1}{x}$  a pour valeur interdite  $x=0$  car la division par zéro n'existe pas.
- L'expression  $\sqrt{x}$  a pour valeurs interdites tous les nombres strictement négatifs.

c) Résoudre par le calcul l'inéquation  $\frac{-4x+7}{3x+12} \leq 0$

**Étape 1 : On commence par faire un tableau de signe**

**Le signe du numérateur a été étudié en a) , on fait de même pour le signe de  $3x+12$  .**

$$3x+12=0$$

$$3x=-12$$

$$x=\frac{-12}{3}$$

$$x=-4$$

**On pense à la valeur interdite puisqu'il y a un quotient ! :**

**On obtient le tableau suivant :**

$x$	$-\infty$	$-4$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$	Pour vérifier !		
Signe de $-4x+7$		+	+	0	-	On sait que $-4x+7$ est du signe de $-4$ « à droite du zéro »	
Signe de $3x+12$		-	0	+	+	On sait que $3x+12$ est du signe de $3$ « à droite du zéro »	
Signe du quotient $\frac{-4x+7}{3x+12}$		-		+	0	-	On applique la règle des signes et on pense à la valeur interdite !

Étape 2 : On résout l'inéquation  $\frac{-4x+7}{3x+12} \leq 0$  à l'aide de la dernière ligne du tableau :

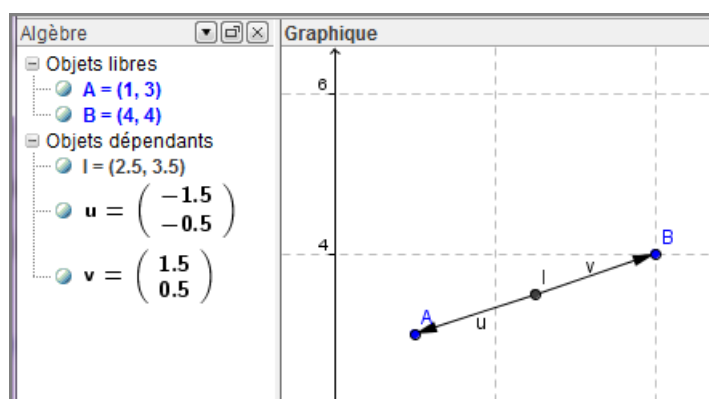
$$S = ]-\infty; -4[ \cup \left[ \frac{7}{4}; +\infty[$$

### Vrai - Faux

Préciser pour chaque affirmation suivante si elle est vraie ou fausse. On justifiera soigneusement.

a) Si I est le milieu de [AB] alors  $\vec{IA} = \vec{IB}$ .

Cette phrase est fausse, les vecteurs  $\vec{IA}$  et  $\vec{IB}$  ont même direction, même longueur mais ils sont de sens opposés :  $\vec{IA} = -\vec{IB}$



b) Si une série statistique ordonnée compte 10 valeurs, alors la médiane est toujours une valeur de la série.

Cette phrase est fausse comme le montre le contre-exemple suivant :

1 ; 3 ; 7 ; 7 ; 8 ; 9 ; 9 ; 12 ; 12 ; 12 . La médiane partage la série ordonnée en deux séries de 5 valeurs.

Elle est donc, par convention, la demi-somme de la 5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> valeur. Ici  $Me = \frac{8+9}{2} = 8,5$ . Ce n'est donc pas une valeur de la série.

### EXERCICE 2 : ( 5 points). Les trois parties sont indépendantes

#### Partie 1

Dans un repère du plan, soient les points A(-2 ; 3) ; B( 2 ; 5 ) et C(22 ; -35).

a) Calculer les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$

a)  $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$  d'où  $\vec{AB}(4; 2)$

b) Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

Soit  $D(x; y)$ .  $\vec{DC}(22 - x; -35 - y)$

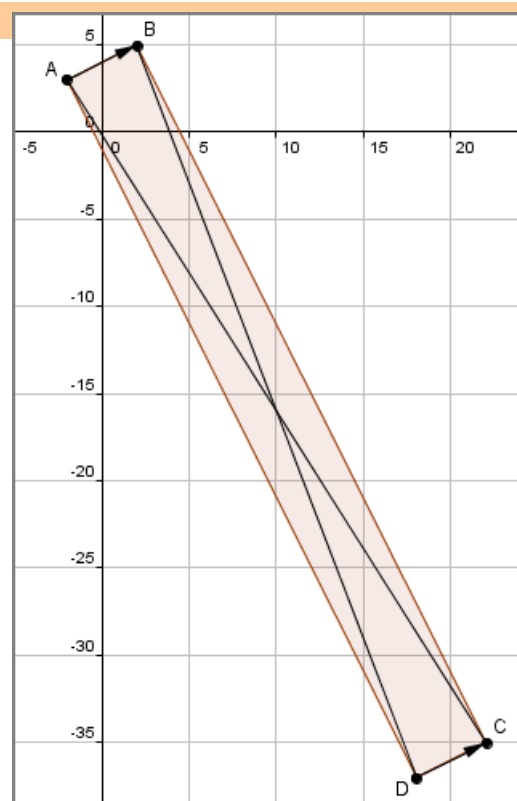
ABCD est un parallélogramme équivaut à :

$$\vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 22 - x = 4 \\ -35 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 18 \text{ et } y = -37$$

donc  $D(18; -37)$

c) Montrer que ABCD est un rectangle.

Plusieurs méthodes sont possibles



### Rappel :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

### Méthode 1

$$AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}, \quad BC = \sqrt{(22 - 2)^2 + (-35 - 5)^2} = \sqrt{2000} \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{24^2 + (-38)^2} = \sqrt{2020}$$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ , par la réciproque de Pythagore  $ABC$  est rectangle en  $B$ .

$ABCD$  est donc un parallélogramme avec un angle droit, c'est un rectangle.

### Méthode 2, un peu plus économique puisque deux calculs de longueurs suffisent :

$$AC = \sqrt{24^2 + (-38)^2} = \sqrt{2020} \quad \text{et} \quad BD = \sqrt{16^2 + (-42)^2} = \sqrt{2020}$$

$ABCD$  est un parallélogramme dont les deux diagonales sont de même longueur, c'est un rectangle.

### Partie 2

Lors d'une interrogation, Hervé doit répondre à la questions suivante :

« Sachant que  $ABCD$  est un parallélogramme, déterminer un vecteur égal à  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ . »

Voici sa réponse : «  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$  car j'applique la relation de Chasles »

Que pensez-vous de la réponse d'Hervé ? Justifiez soigneusement.

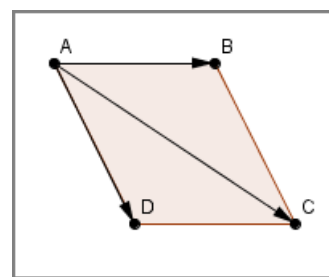
La réponse d'Hervé est fautive, la relation de Chasles s'applique par exemple comme ceci :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$  :

l'extrémité du premier vecteur doit être l'origine du second

Ici, il aurait dû écrire :

Sachant que  $ABCD$  est un parallélogramme on sait que  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

Ainsi,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ , en utilisant la relation de Chasles.

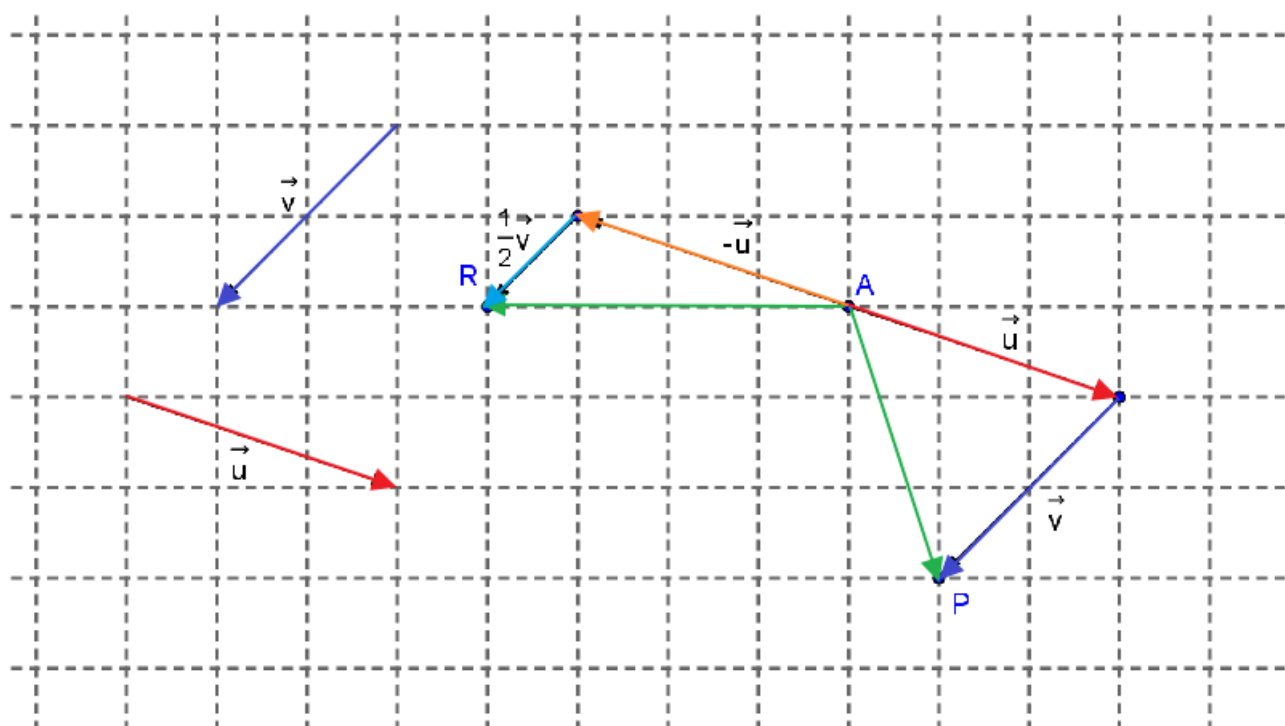


### Partie 3

Construire sur le graphique de l'annexe, les points P et R tels que :

$$\overrightarrow{AP} = \vec{u} + \vec{v},$$

$$\overrightarrow{AR} = -\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$



### EXERCICE 3 : ( 5 points)

Un artisan fabrique entre 0 et 40 objets par jour. Tous les objets fabriqués sont vendus.

Son bénéfice est le résultat de la différence entre la recette résultant de la vente de ces objets et les coûts de production (entretien des machines, électricité, contrats d'assurance, etc...)

Ce bénéfice est fonction du nombre d'objets fabriqués chaque jour.

Son expression est  $B(x) = -x^2 + 40x - 300$  où  $x$  est le nombre d'objets fabriqués un jour donné.

- Si  $B(x) > 0$ , l'artisan gagne de l'argent, son travail est rentable
- Si  $B(x) = 0$ , l'artisan ne gagne, ni ne perd d'argent.
- Si  $B(x) < 0$ , l'artisan perd de l'argent, son travail n'est pas rentable.

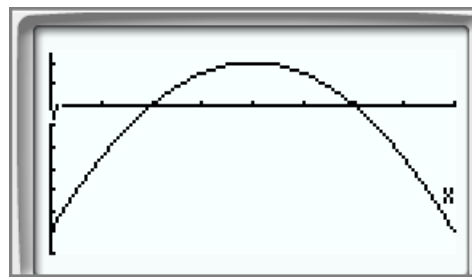
1. Cette question a pour but de déterminer combien d'objets l'artisan doit fabriquer pour que son travail soit rentable. Voici ce que proposent deux élèves pour le résoudre.

◆ Hervé préconise l'utilisation de la calculatrice : il entre l'expression du bénéfice, règle la fenêtre pour obtenir l'écran ci-contre et il prétend qu'ainsi, il a la solution du problème.

◆ Sandra pense que la démarche de Hervé n'est pas très rigoureuse, elle préfère une confirmation avec le calcul algébrique.

On voit sur son brouillon le développement de l'expression

$(x-10)(30-x)$ , et le tableau de signe de cette expression.



a) Résoudre cette question en suivant la démarche de Hervé.

**Sur sa calculatrice, Hervé a correctement réglé la fenêtre donc sur l'axe des abscisses, les valeurs de  $x$  représentées vont de 0 à 40 objets, donc chaque graduation représente 5 objets.**

**Le travail de l'artisan est rentable lorsque le bénéfice est strictement positif, c'est-à-dire lorsque la courbe représentant le bénéfice se trouve au-dessus de l'axe des abscisses.**

**Donc graphiquement on lit que  $B(x) > 0$  pour  $x \in ]10; 30[$ .**

**Donc le travail de l'artisan est rentable lorsqu'il fabrique entre 11 et 29 objets.**

b) Confirmer les réponses en suivant la démarche de Sandra.

**Comme le travail de l'artisan est rentable lorsque le bénéfice est strictement positif, Sandra veut résoudre algébriquement l'inéquation  $B(x) > 0$ .**

**Sur son brouillon elle a développé l'expression  $(x-10)(30-x)$  :**

$$(x-10)(30-x) = 30x - x^2 - 300 + 10x = -x^2 + 40x - 300 = B(x)$$

**Comme la forme développée de  $(x-10)(30-x)$  est égale à l'expression de  $B(x)$ , on en déduit que résoudre l'inéquation  $B(x) > 0$  revient à résoudre l'inéquation suivante  $(x-10)(30-x) > 0$  ; résolution qui peut se faire à l'aide du tableau de signe suivant :**

**(pour remplir ce tableau, on utilise le cours concernant le signe de  $ax+b$ )**

$x$	0	10	30	40	Justifications
Signe de $x-10$		-	0	+	$a=1 > 0$
Signe de $30-x$		+	+	0	$a=-1 < 0$
Signe du produit $(x-10)(30-x)$		-	0	+	0

**Ainsi on a  $(x-10)(30-x) > 0$  pour  $x \in ]10; 30[$ .**

**Donc le travail de l'artisan est rentable lorsqu'il fabrique entre 11 et 29 objets.**

**Hervé et Sandra sont d'accord !**

2. a) Vérifier que  $B(x) = 100 - (x-20)^2$ .

**On a :**  $100 - (x - 20)^2 = 100 - (x^2 - 2 \times x \times 20 + 20^2) = 100 - x^2 + 40x - 400 = -x^2 + 40x - 300 = B(x)$

**Donc on a bien**  $B(x) = 100 - (x - 20)^2$

b) Hier l'artisan a fait 96 euros de bénéfice, combien a-t-il fabriqué et vendu d'objets ?

**On utilise l'expression de la question précédente :**

$$B(x) = 96 \Leftrightarrow 100 - (x - 20)^2 = 96$$

$$\Leftrightarrow 100 - (x - 20)^2 - 96 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - (x - 20)^2 = 0$$

**On a :**  $\Leftrightarrow [2 - (x - 20)][2 + (x - 20)] = 0$  . **On utilise la règle du produit nul :**  $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$  ou  $B = 0$

$$\Leftrightarrow (22 - x)(-18 + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 22 - x = 0 \text{ ou } -18 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 22 \text{ ou } x = 18$$

**Donc hier l'artisan a fait un bénéfice de 96 euros en fabriquant et vendant 18 ou 22 objets, on ne peut pas savoir !!!!!**

### EXERCICE 4 : ( 5 points)

Afin de tester l'efficacité d'un médicament contre le stress, 60 patients, ayant environ 16,5 de pression artérielle, ont accepté de participer à un essai clinique.

Après tirage au sort, la moitié des patients (constituant le groupe M) ont pris le médicament pendant un mois, l'autre moitié (constituant le groupe P), un placebo (comprimé neutre).

Les patients ne savent pas s'ils prennent le médicament ou le placebo.

Les mesures de pression artérielle concernant les patients des deux groupes, après le mois d'essai clinique, sont indiquées ci- dessous :

**Groupe M** : (les données ont été organisées)

Pression artérielle	12	13	13,5	14	14,5	15	16	17	18
Effectifs	2	4	2	7	6	5	1	1	2

**Groupe P** : (les données ne sont pas triées)

16 – 16,5 – 14 – 17,5 – 17 – 17 – 15 – 17,5 – 16 – 16 – 16,5 – 15,5 – 17 – 16 – 16,5

15,5 – 16 – 16,5 – 16,5 – 15,5 – 17 – 16 – 16,5 – 17 – 14 – 17 – 16,5 – 16 – 16,5 – 17,5.

On a construit le diagramme en boîte de la série du groupe P sur la feuille annexe.

a) Lire sur ce diagramme les valeurs de la médiane, du premier et du troisième quartile du groupe P.

**Lecture pour le groupe P** :  $Q_1 = 16$ ,  $Me = 16,5$  et  $Q_3 = 17$

**Vérification en ordonnant les valeurs**

14	14	15	15,5	15,5	15,5	16	16	16	16	16	16	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	17	17	17	17	17	17	17,5	17,5	17,5
----	----	----	------	------	------	----	----	----	----	----	----	------	------	------	------	------	------	------	------	----	----	----	----	----	----	------	------	------

b) Construire sur le même graphique le diagramme en boîte de la série du groupe M en justifiant les calculs.

**Calculs pour le groupe M** :

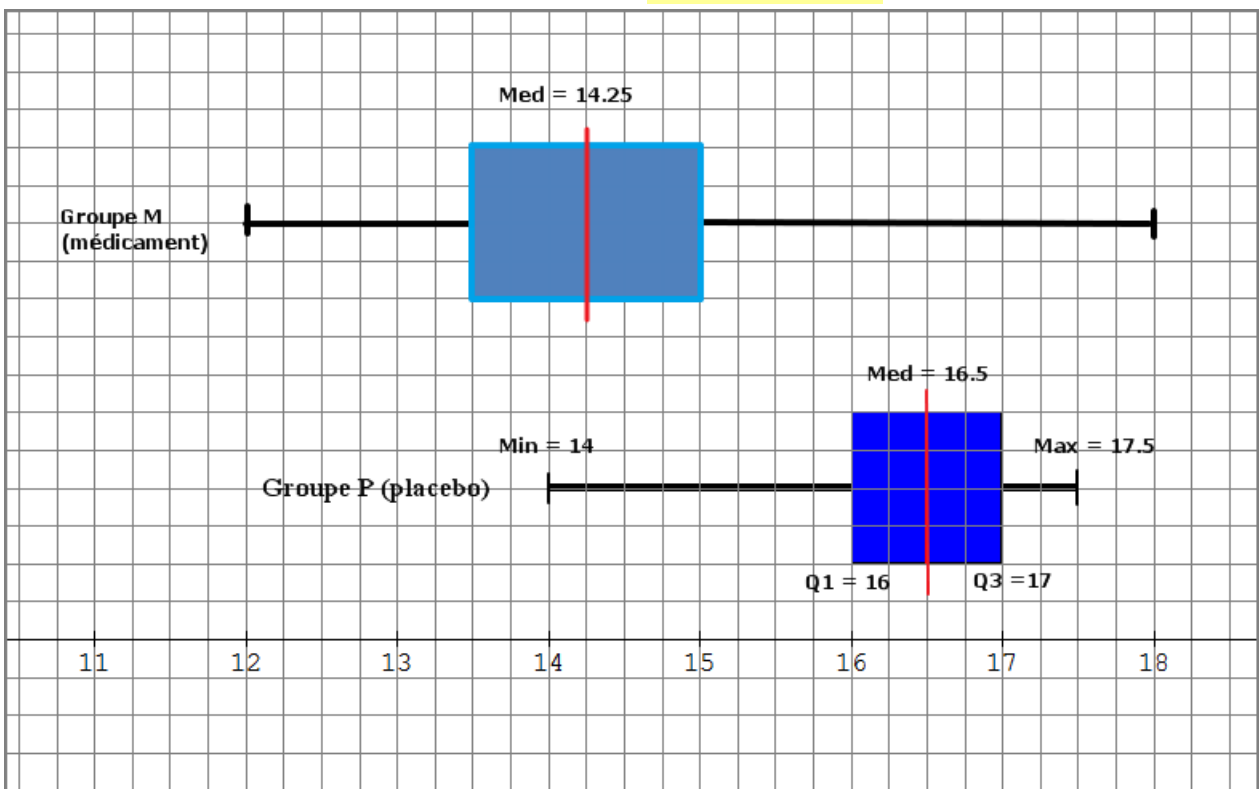
Pression artérielle	12	13	13,5	14	14,5	15	16	17	18
Effectifs	2	4	2	7	6	5	1	1	2
Effectifs cumulés croissants	2	6	8	15	21	26	27	28	30

On utilise la ligne des effectifs cumulés croissants pour déterminer la médiane et les quartiles

$N = 30$  donc  $\frac{N}{2} = 15$ ,  $\frac{N}{4} = 7,5$  et  $\frac{3 \times N}{4} = 22,5$

donc  $Q_1$  est la 8<sup>ième</sup> valeur soit 13,5 ,

Me est la demi-somme des 15<sup>ième</sup> et 16<sup>ième</sup> valeur soit  $\frac{14 + 14,5}{2} = 14,25$  et  $Q_3$  est la 23<sup>ième</sup> valeur soit 15



c) En utilisant les données et (ou) les diagrammes dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

- Phrase 1 : Au moins 75% des patients du groupe M ont une pression artérielle inférieure ou égale à 15.

**Cette phrase est vraie car le troisième quartile Q3 est égal à 15.**

- Phrase 2 : Le groupe ayant pris le médicament a un écart interquartile plus petit que celui du groupe qui a pris le placebo.

**Cette phrase est fausse car pour le groupe M l'écart interquartile est égal à  $15 - 13,5 = 1,5$  alors que pour le groupe placebo l'écart interquartile est égal à  $17 - 16 = 1$**

- Phrase 3 : Au moins 50% des patients ayant pris le placebo ont une pression artérielle comprise entre 16 et 17.

**Cette phrase est vraie, on peut calculer le pourcentage à l'aide des données : on compte 21 valeurs**

**comprises entre 16 et 17 (au sens large).  $\frac{21}{30} = 0,7$  donc 70% des patients ayant pris le placebo ont une pression artérielle comprise entre 16 et 17.**

- d) En utilisant les données et (ou) les diagrammes dire si le médicament semble avoir une réelle efficacité.

**Dans le groupe placebo, la pression artérielle est restée très stable autour de 16,5, l'effet placebo n'a pas fonctionné pour plus de 70 % des patients alors que dans le groupe Médicament, la pression a bien baissé puisqu'au moins 50 % des personnes ont une tension inférieure ou égale à 14,25.**

**Au vu de ce graphique, le médicament semble faire baisser de façon significative la pression artérielle, même s'il n'a pas d'effet sur quelques cas isolés. Il semble donc avoir une réelle efficacité.**