Corrigé du devoir commun de Mathématiques du premier trimestre 2011-2012
SECONDES

EXERCICE 1 : (4 points)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

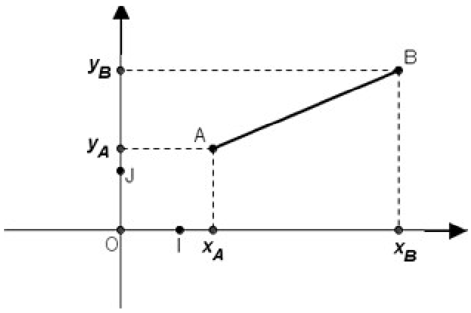
a) Soit une fonction *f* et sa représentation graphique C_f. On donne un point $A(x_A ; y_A)$.

Comment démontre -t-on que A appartient ou n'appartient pas à C_f ?

Le point $A(x_A ; y_A)$ appartient à la courbe C_f si son abscisse appartient à l'ensemble de définition de la fonction *f* et si son ordonnée est l'image par *f* de son abscisse, c'est-à-dire si $f(x_A)=y_A$. Sinon le point A n'appartient pas à la courbe représentative de *f*.

b) Soit un repère orthonormé (O, I, J)

Donnez la formule permettant de calculer la distance AB .



La formule est : AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Quelle propriété a-t-on utilisée pour établir cette formule ?

On a utilisé le théorème de Pythagore pour établir cette formule.

Partie B : Vrai - Faux

Préciser pour chaque affirmation suivante si elle est **vraie ou fausse**. **On justifiera soigneusement**.

1) On donne A(–53 ; 57) et B(45 ; –49) alors le point M(2 ; –2) est le milieu du segment [AB]

L'affirmation est fausse. En effet, notons N le milieu du segment [AB] et déterminons ses coordonnées. On a : $x_N=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-53+45}{2}=-4$ **et** $y_N=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{57+(-49)}{2}=4$ **. Le milieu de [AB] a donc comme coordonnées (– 4 ; 4). Ainsi le point M(2 ; –2) n'est pas le milieu du segment [AB].**

2) Dans un repère orthonormé, si C est le cercle de centre A (3 ; – 1) et de rayon $3\sqrt{2}$ alors le point B(6 ; –4) appartient au cercle C

Cette affirmation est vraie. En effet, on a AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ = $\sqrt{(6-3)^2+(-4-(-1))^2}$ = $\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}$ = $\sqrt{18}$ = $\sqrt{2\times 3^2}$ = $3\sqrt{2}$.
La distance AB est égale au rayon, donc le point B se trouve bien sur le cercle de centre A et de rayon $3\sqrt{2}$.

EXERCICE 2 : (4 points)

Soit la représentation graphique d'une fonction *f* *(sur la feuille Annexe page 5)*

1.Conjecturez en lisant sur le graphique, les valeurs approchées des nombres suivants :

a) l'image de – **1** par *f*

l'image de – 1 par *f* est environ –2

b) $f(3)$

$f(3)\approx 2$

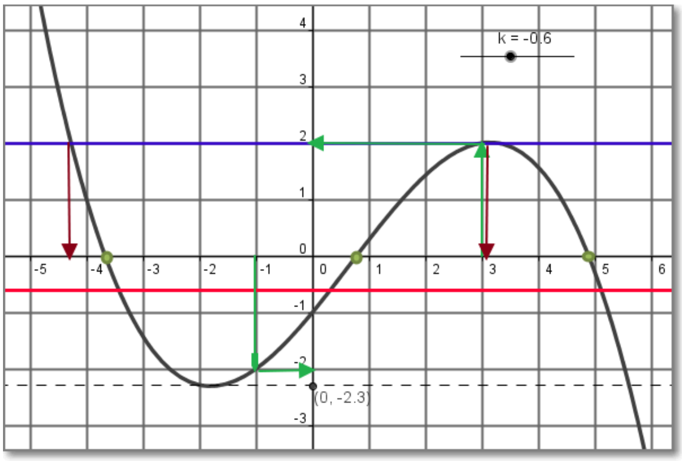
c) le ou les antécédents de 2

2 a pour antécédents par *f* – 4,3 environ et 3.

d) la ou les solutions de l'équation $f(x)=0$

les solution de l'équation $f(x)=0$ **sont environ**

–3,7 ; 0,8 et 4,9



2. Déterminez l'ensemble des valeurs de *k* pour lesquelles l'équation $f(x)=k$ admet exactement 3 solutions.

Il semble que l'équation $f(x)=k$ **admet exactement 3 solutions pour *k* appartenant à** $]-2{,}3\,;2[$ **:**

ce sont les abscisses des 3 points de la courbe qui ont pour ordonnée *k*.

Si k est plus petit que – 2,3 ou plus grand que 2 , il semble qu'il y ait une seule solution

EXERCICE 3 : (6 points)

Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=\left(\frac{1}{2}x+1\right)(x-3)$

1. Calculer l'image par *f* des nombres suivants : – 3 ; $\frac{2}{3}$: toutes les étapes du calcul doivent apparaître sur la copie

$f(-3) = \left(\frac{1}{2}\times-3+1\right)(-3-3)=\frac{-1}{2}\times-6=3$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+1\right)\left(\frac{2}{3}-3\right)=\frac{4}{3}\times\frac{-7}{3} = \frac{-28}{9}$

2. Déterminer par le calcul, les antécédents de zéro.

Les antécédents de 0 sont les solutions de $f(x)=0$ **donc de l'équation** $\left(\frac{1}{2}x+1\right)(x-3)=0$.

On utilise la règle du produit nul : $A\times B=0\Leftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0$

$\left(\frac{1}{2}x+1\right)(x-3)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+1=0$ **ou** $x-3=0 \Leftrightarrow x=-2$ **ou** $x=3$

les antécédents de 0 sont –2 et 3

3. Développer et réduire l'expression de $f(x)$

$f(x)=\left(\frac{1}{2}x+1\right)(x-3) = \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+x-3 = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3$

4. En déduire les solutions exactes de l'équation $f(x)=-3$

$f(x)=-3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-3 = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x=0 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow$

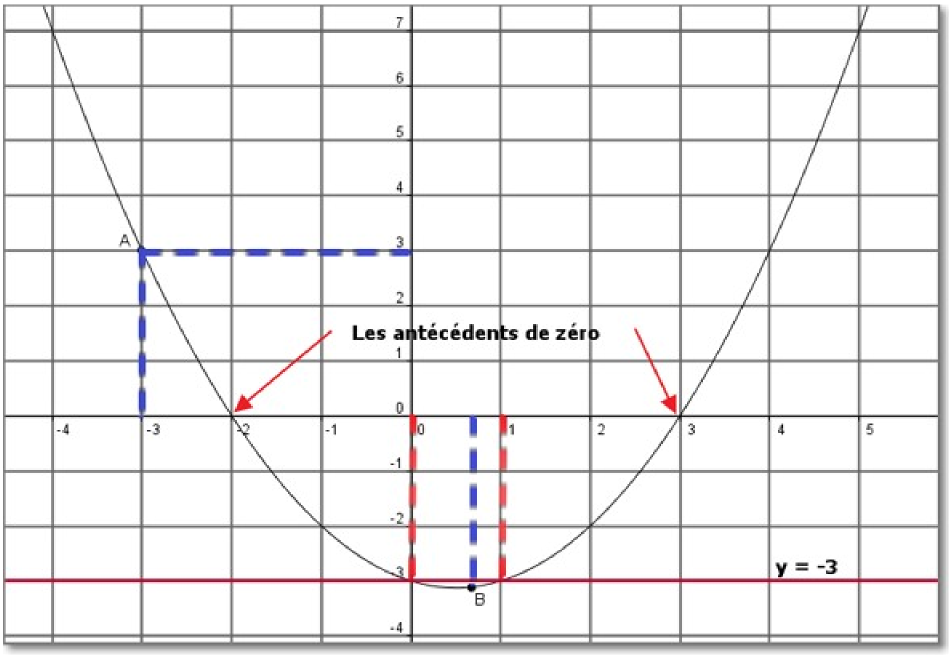
$x=0$ ou $x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$.

Les solutions exactes de l'équation $f(x)=-3$ sont 0 et 1.
(Cela est confirmé dans le tableau de valeurs ci-dessous)

5. Compléter sur l'annexe (page 3) le tableau de valeurs de la fonction f en utilisant la calculatrice.

x	**–4**	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$f(x)$	**7**	**3**	**0**	**–2**	**–3**	**–3**	**–2**	**0**	**3**	**7**

6. Tracer la courbe représentative de f sur le repère donné en annexe. Contrôler sur le graphique la cohérence de vos réponses aux questions précédentes.



EXERCICE 4 : (4 points)

Toute trace de recherche sera valorisée pour cet exercice.

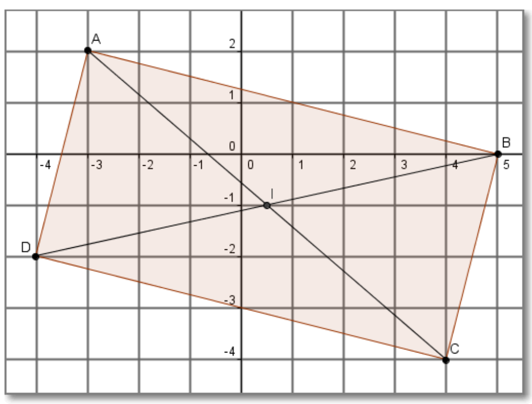
Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(-3;2)$, $B(5;0)$ et $C(4;-4)$

1) Déterminez par le calcul, les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu.

I milieu de [AC] $x_I=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}$ **et** $y_I=\frac{2+(-4)}{2}=-1$

I est aussi le milieu de [BD]. Ainsi : $\begin{cases} x_I=\frac{x_B+x_D}{2} \\ y_I=\frac{y_B+y_D}{2} \end{cases}$



C'est à dire : $\begin{cases} \frac{1}{2}=\frac{5+x_D}{2} \\ -1=\frac{0+y_D}{2} \end{cases}$ **qui équivaut à** $\begin{cases} 1=5+x_D \\ -2=y_D \end{cases}$

D'où : $x_D = -4$ et $y_D = -2$.
ABCD est un parallélogramme si et seulement si $D(-4;-2)$

2) Montrez que ABCD est un rectangle.

Plusieurs méthodes sont possibles qui utilisent les propriétés des parallélogrammes.

Méthode 1 : on utilise la propriété « *si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle* »
On calcule les distances AB, AC et BC.
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{68}$,
de même $AC = \sqrt{85}$ **et** $BC = \sqrt{17}$
$AC^2 = AB^2 + BC^2$**. Ainsi, par la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en** B**.**
Finalement, ABCD est un parallélogramme (d'après 1.)), avec un angle droit, c'est donc un rectangle.

Méthode 2 : on utilise la propriété « *si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle* »
On calcule AC et BD.
$\mathrm{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-(-3))^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{(7)^2 + (-6)^2} = \sqrt{49+36} = \sqrt{85}$
$\mathrm{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(-4-5)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(9)^2 + (-2)^2} = \sqrt{81+4} = \sqrt{85}$
AC = BD, ABCD est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur, c'est donc un rectangle.

EXERCICE 5 : (2 points)

Voici un algorithme de calcul :

Choisir un nombre x
Lui soustraire 2
Prendre l'inverse du résultat
Multiplier par 5
Ajouter 6 fois le nombre de départ
On note $f(x)$ le résultat

a) Déterminer, parmi les expressions suivantes, celle qui est égale à $f(x)$

$\dfrac{5+6x}{x-2}$; $6x+\dfrac{5}{x-2}$; $5(2-x)+6x$

Exécutons l'algorithme proposé
Choisir un nombre x : x
Lui soustraire 2 : $x-2$
Prendre l'inverse du résultat : $\dfrac{1}{x-2}$
Multiplier par 5 : $\dfrac{5}{x-2}$
Ajouter 6 fois le nombre de départ : $\dfrac{5}{x-2} + 6x$
$f(x) = \dfrac{5}{x-2} + 6x = 6x + \dfrac{5}{x-2}$

b) Écrire un algorithme correspondant à une des deux autres expressions (au choix , mais précisez bien laquelle)

Algorithme correspondant au résultat $\frac{5+6x}{x-2}$ **Choisir un nombre** x **Multiplier par 6 :** $6x$ **Ajouter 5 :** $5+6x$ **On note** $R(x)$ **ce résultat.** **Soustraire 2 au nombre de départ :** $x-2$ **Prendre l'inverse du résultat :** $\frac{1}{x-2}$ **Multiplier ce résultat par** $R(x)$ **:** $\frac{5+6x}{x-2}$	**Algorithme correspondant au résultat** $5(2-x)+6x$ **Choisir un nombre** x **Le soustraire à 2 :** $2-x$ **Multiplier par 5 :** $5(2-x)$ **Ajouter 6 fois le nombre de départ :** $5(2-x)+6x$