Correction du bac blanc de mai 2018

EXERCICE 1 **Commun à tous les candidats (5 points)**

Partie A : production de fraises

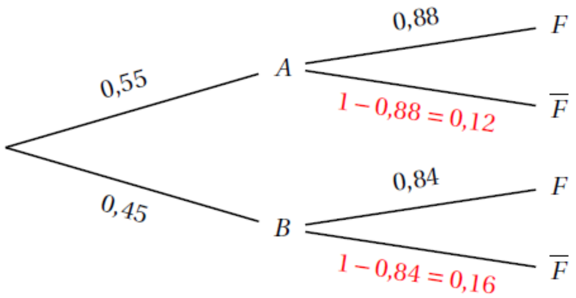
On appelle : • A l'évènement «la fleur de fraisier vient de la serre A»;

• B l'évènement «la fleur de fraisier vient de la serre B»;

• F l'évènement «la fleur de fraisier donne une fraise»;

• F l'évènement contraire de F.

On résume les données du texte dans un arbre pondéré :



Proposition 1 : *La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.*

D'après les notations, on cherche la probabilité de l'évènement F ; d'après la formule des probabilités totales : $P(F)=P(A\cap F)+P(B\cap F)=P(A)\times P_A(F)+P(B)\times P_B(F)=0,55\times 0,88+0,45\times 0,84=0,862$

Donc la proposition1 est vraie.

Proposition 2 : *On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne une fleur. La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,439.*

On cherche la probabilité que la fleur provienne de la serre A sachant qu'elle a donné une fraise : $P_F(A)=\frac{P(A\cap F)}{P(F)}=\frac{0,55\times 0,88}{0,862}\approx 0,5616\neq 0,439$

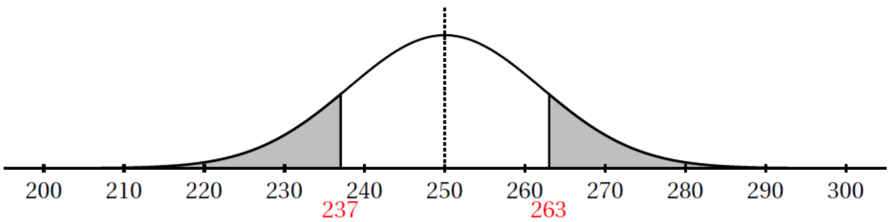
Donc la proposition 2 est fausse.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes.

La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance μ=250 et d'écart-type σ.

1. On donne $P(X\leq 237)=0,14$. On constate que $237=250-13=\mu-13$ et $263=250+13=\mu+13$. Pour des raisons de symétrie de la fonction de densité autour de la droite d'équation $x=\mu$, on a:
   $P(X\leq 237)=P(X\geq 263)$ (parties grisées sur la figure).
   $P(237<X<263)=1-(P(X\leq 237)+P(X\geq 263))=1-2\times P(X\leq 237)=1-2\times 0,14=0,72$. La probabilité de l'évènement «la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes» est 0,72.



2. *On note Y la variable aléatoire définie par:* $Y=\frac{X-250}{\sigma}$.

a. D'après le cours, la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1 (la loi normale centrée réduite).

b. On sait que σ est un nombre strictement positif; donc: $X \leq 237 \Leftrightarrow X - 250 \leq 237 - 250$
$\Leftrightarrow \frac{X-250}{\sigma} \leq \frac{-13}{\sigma} \Leftrightarrow Y \leq \frac{-13}{\sigma}$. Comme P(X ≤ 237)=0,14, on en déduit que $P(Y \leq \frac{-13}{\sigma}) = 0{,}14$.

c. Pour Y suivant la loi normale centrée réduite, on cherche β tel que P(Y ≤ β)=0,14; la calculatrice donne pour résultat environ −1,08. On a donc : −1,08= $\frac{13}{\sigma}$ et donc : σ≈12. 3.

3. *Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m deux nombres entiers.*

a. D'après le cours, pour toute loi normale, P(μ−2σ ≤ X ≤ μ+2σ)≈0,95; donc P(250−2×12 ≤ X ≤250+2×12)≈0,95 ou encore P(250−24 ≤ X ≤ 250+24)≈0,95.
Et si n'>n, [250−n;250+n]⊂[250−n';250+n'] et donc P(X∈[250−n;250+n])<P(X∈[250−n';250+n'])
Donc n=24 est le plus petit entier tel que P(250−n ≤ X ≤250+n).

b. On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle [230; m]. Cherchons m pour que P(230≤ X ≤m)soit égal à 0,95.
On a : P(230 ≤ X ≤m)=P(X ≤m)−P(X <230). D'après la calculatrice : P(X <230)≈0,0478.

Donc P(230 ≤ X ≤ m)=0,95 ⇔ P(X ≤ m)−P(X<230)=0,95 ⇔ P(X ≤ m)=P(X < 230)+0,95

⇔ P(X ≤m)≈0,0478+0,95 ⇔ P(X ≤m)≈0,9978.

D'après la calculatrice, le nombre m tel que P(X≤m)≈0,9978 vaut environ 284,2.
Donc la plus petite valeur de m pour laquelle la probabilité que la masse de la barquette se trouve dans l'intervalle [230; m] soit supérieure ou égale à 0,95 est m=285.

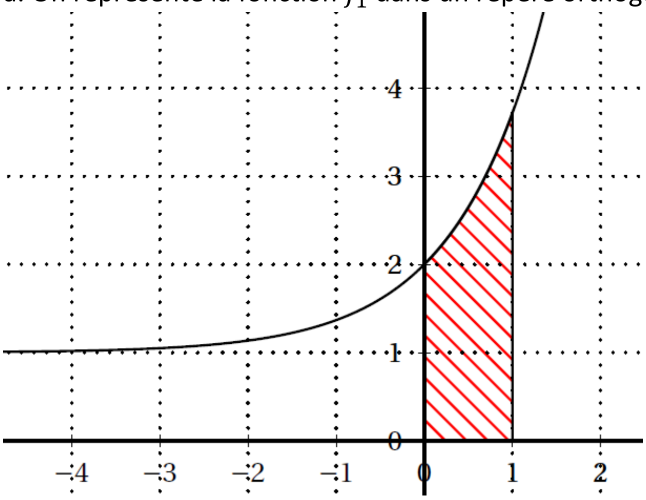
EXERCICE 2 Commun à tous les candidats (4 points)

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur R par: $f_a(x) = ae^{ax} + a$. On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction $f_a(x)$ entre 0 et 1 : $I(a) = \int_0^1 f_a(x)dx$.

1. On pose dans cette question a=0. $f_0(x) = 0$ donc $I(0) = \int_0^1 0dx = 0$

2. On pose dans cette question a=1. On étudie donc la fonction f_1 définie sur R par: $f_1(x) = e^x + 1$.

a. On représente la fonction f_1 dans un repère orthogonal :



b. La fonction F_1 définie par $F_1(x)= e^x+x$ est une primitive de la fonction f_1. Donc $I(0) = \int_0^1 f_1(x)dx = F_1(1) - F_1(0) = (e^1 + 1) - (e^0 - 0) = e$ ≈2,7.

3. On cherche s'il existe une valeur de a pour laquelle $I(a)$est égale à 2. La fonction F_a définie sur R par $F_a(x) = e^{ax} + ax$ est une primitive de f_a.

Donc $I(a) = \int_0^1 f_a(x)dx = F_a(1) - F_a(0) = (e^a + a) - (e^0 - 0) = e^a + a - 1$.
Soit g la fonction définie sur [0;1] par $g(x) = e^x + x - 1$. g est dérivable donc continue et $g'(x) = e^x + 1$>0 sur [0;1]. $g(0) = 0$<2 et $g(1) = e$ ≈2,72>2 La fonction g est continue et strictement croissante sur [0;1]; g(0)<2 et g(1)>2 donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation g(x)=2 admet une solution unique dans l'intervalle [0;1]. Il existe donc une valeur unique de a dans [0;1] telle que $g(a) = 2$.

$g(0,7)\approx1,71<2$	$g(0,79)\approx1,99<2$
$g(0,8)\approx2,03>2$ donc $a\in[0,7;\ 0,8]$	$g(0,80)\approx2,03>2$ donc $a\in[0,79;\ 0,80]$

<u>EXERCICE 3</u> : candidats n'ayant pas suivis l'enseignement de spécialité (5 points)

1. On a $1^4+2\times1^3-1-2=1+2-1-2=0$, donc 1 est solution de(E).
2. Tout imaginaire pur s'écrit ib avec b : un réel.

On a : $(ib)^4 + 2(ib)^3 - (ib) - 2 = b^4 - 2ib^3 - ib - 2 = (b^4 - 2) + i(-2b^3 - b)$
Ainsi

$$(ib)^4 + 2(ib)^3 - (ib) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2 = 0 \\ -2b^3 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2 = 0 \\ -b(2b^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2 = 0 \\ b = 0 \quad car\ 2b^2 + 1 > 0 \end{cases}$$

Or $b^2 - 2 \neq 0$ pour $b = 0$. Donc le système n'a pas de solution et donc il n'existe pas de réel b tel que ib soit solution de l'équation (E). Donc l'équation ne possède pas de solution imaginaire pure.

3. Pour tout complexe z, on a :

$$(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 = z^4 + 2z^3 - z - 2$$

4. $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = 0 \Leftrightarrow \left((z^2 + z - 2) = 0\ ou\ (z^2 + z + 1) = 0\right)$

On résout ces 2 équations de degré 2 à l'aide de leur discriminent :
Pour $z^2 + z - 2$: $\Delta = 9$, donc il a 2 racines réelles : $z_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$ et $z_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$
Pour $z^2 + z + 1$: $\Delta = -3$ donc il a2 racines complexes conjuguées : $z_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_4 = \overline{z_3} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
Donc l'équation (E) a 4 solutions : $z_1 = 1$; $z_2 = -2$; $z_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_4 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

5. On a $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1 - 2 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -2$

Et $z_1 \times z_2 \times z_3 \times z_4 = 1 \times (-2) \times \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \times \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = -2 \times \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = -2 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = -2$
Donc la somme des solutions est bien égale à leur produit.

6. Soit A(-2), B($\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$), C(1) et D($\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$).

Le milieu de [AC] a pour affixe : $\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{-1}{2}$ et celui de [BD] : $\frac{z_B+z_D}{2} = \frac{-1}{2}$.
De plus, $\overrightarrow{BD}$ a pour affixe $(z_D - z_B) = (i\sqrt{3})$ donc (BD) est parallèle à l'axe des ordonnées.
Le repère étant orthonormé, (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
Donc le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui ont le même milieu et qui sont perpendiculaires,

<u>EXERCICE 4</u> Commun à tous les candidats (6 points)

Partie A : premier modèle – avec une suite

1.a. On appelle u_n la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus. On a donc u0 = 1000 puisqu'initialement, on introduit 1kg soit 1000 grammes de bactéries. D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de10%, c'est donc qu'il est multiplié par 1+ $\frac{20}{100}$ = 1,2. Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100g de bactéries. Donc, pour tout n, $u_{n+1} = 1,2u_n - 100$ avec u_0=1000.

b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg soit 30 000g. On cherche le plus petit entier n tel que u_n>30 000. À la calculatrice, on trouve u_{22} ≈28 103 et u_{23}≈33 624; donc on dépasse 30 kg de bactéries à partir de 23 jours.

2. a. Soit $P(n)$ la propriété $u_n \geq 1000$.
• u_0=1000 $\geq$1000 donc la propriété est vraie pour n=0.
• On suppose la propriété vraie pour un rang quelconque p ∈N, c'est-à-dire u_p>1000.
u_{P+1} =1,2u_p −100. Or $u_p \geq 1000$ donc 1,2u_p $\geq$1200 donc 1,2u_p −100 $\geq$1100$\geq$1000. Donc $u_{p+1} \geq 1000$ On a démontré que la propriété était vraie au rang p+1, elle est donc héréditaire.
• La propriété est vraie au rang 0, elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$, donc d'après le principe de récurrence elle est vraie pour tout n>0. Pour tout n, u_n ≥1000.

b. Pour tout $n, u_{n+1} - u_n = 1{,}2u_n - 100 - u_n = 0{,}2u_n - 100$. Or, pour tout n, u_n ≥1000 donc 0,2u_n >200 et donc 0,2u_n−100 >100. On a donc démontré que, pour tout $n, u_{n+1} - u_n$>0. On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel $n, v_n = u_n - 500$

a. Pour tout $n, v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = (1{,}2u_n - 100) - 500 = 1{,}2(v_n + 500) - 600 = 1{,}2v_n$. Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 1,2 et de premier terme : $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $n, v_n = 500 \times 1{,}2^n$ Et comme, pour tout $n, u_n = v_n + 500$. On en déduit que pour tout $n, u_n = 500 + 500 \times 1{,}2^n$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}2^n = +\infty$, car $1{,}2 > 1$. D'où: $\lim\limits_{n\to+\infty} 500 \times 1{,}2^n = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

c. On doit résoudre : $u_n \geq 30000$ soit $500 + 500 \times 1{,}2^n \geq 30000 \Leftrightarrow 1{,}2^n \geq 59 \Leftrightarrow \ln(1{,}2^n) \geq \ln(59)$ $\Leftrightarrow n\ln(1{,}2) \geq \ln(59) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(59)}{\ln(1{,}2)}$. Or $\frac{\ln(59)}{\ln(1{,}2)} \approx 22{,}4$. Donc c'est bien à partir du 23ème jour que la masse de bactéries dépasse les 30kg.

Partie B : second modèle – avec une fonction
Soit f la fonction définie sur [0; +∞[par $f(t) = \frac{50}{1+49e^{-0,2t}}$.
1. a. $f(0) = \frac{50}{1+49e^{-0,2\times0}}$
b. Pour tout t, $e^{-0,2t}$>0 donc 1+49$e^{-0,2t}$ >1 et donc $\frac{1}{1+49e^{-0,2t}}$ <1 On en déduit que $\frac{50}{1+49e^{-0,2t}}$ <50 et donc que, pour tout t, $f(t)$<50.
c. f est du type $50 \times \frac{1}{u}$ avec u : fonction définie, dérivable sur [0; +∞[et qui ne s'annule pas, donc f est dérivable sur [0; +∞[et on a : $f'(t) = 50 \times \frac{-(-0{,}2t\times e^{-0,2t})}{(1+49e^{-0,2t})^2} = \frac{490e^{-0,2t}}{(1+49e^{-0,2t})^2}$. La fonction exponentielle étant strictement positive sur R, on a pour tout t : $490e^{-0,2t} > 0$. Et de même : $(1 + 49e^{-0,2t})^2 > 0$. Ainsi pour tout t $f'(t) > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur [0 ; +∞[.

$d.$ On a $\lim\limits_{t\to+\infty}(-0{,}2t) = -\infty$ Or $\lim\limits_{X\to-\infty}(e^X) = 0$. Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}(e^{-0,2t}) = 0$.

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}(1 + 49e^{-0,2t}) = 1$ Donc par quotient $\lim\limits_{t\to+\infty}(f(t)) = 50$

2. On sait que $f(t)$ représente la masse, en kg, de bactéries au temps t, exprimé en jours.
• f (0)=1 signifie que la masse des bactéries à l'instant t =0 est de1 kg;

• f (t)<50 pour tout t signifie que la masse de bactéries dans la cuve sera toujours inférieure à 50kg;

- f est croissante signifie que la masse de bactéries augmente régulièrement au fil du temps;
- $\lim_{t\to+\infty}(f(t)) = 50$ signifie que la masse de bactéries dans la cuve va se rapprocher de 50kg.

3. On doit résoudre : $f(t) \geq 30$ soit $\frac{50}{1+49e^{-0,2t}} \geq 30$ soit $50 \geq 30 \times (1 + 49e^{-0,2t})$ (car $1 + 49e^{-0,2t} > 0$) soit $\frac{2}{147} \geq e^{-0,2t}$ d'où $\ln(\frac{2}{147}) \geq \ln(e^{-0,2t})$ (car tout est positif et la fonction ln est croissante sur les positifs) d'où $\ln\left(\frac{2}{147}\right) \geq -0,2t$ d'où $t \geq \frac{\ln(\frac{2}{147})}{-0,2}$. Et $\frac{\ln(\frac{2}{147})}{-0,2} \approx 21,5$. Donc d'après ce modèle ce serait au 22ème jour que la masse de bactéries dépasserait les 30kg.