CORRIGÉ DU DEVOIR COMMUN N°3 MAI 2011

Exercice 1 :

1°) a) $C_1 = 15000 + \frac{3}{100} \times 15000 + 3000 = 18450$

b) Le nouveau capital est celui de l'année précédente + les intérêts + les 3000 déposés.

C'est à dire : $C_{n+1} = C_n + \frac{3}{100} \times C_n + 3000 = \left(1 + \frac{3}{100}\right) C_n + 3000 = 1{,}03\, C_n + 3000$

c) $V_{n+1} = C_{n+1} + 100000 = 1{,}03\, C_n + 3000 + 100000$
$= 1{,}03\left(V_n - 100000\right) + 103000 = 1{,}03\, V_n - 103000 + 103000 = 1{,}03\, V_n$

Ainsi, la suite $\left(V_n\right)$ est géométrique de raison $1{,}03$ et de premier terme $V_0 = C_0 + 100000 = 115000$

d) On en déduit que pour tout n entier naturel, $V_n = V_0 \times 1{,}03^n = 115000 \times 1{,}03^n$

Ainsi, $C_n = V_n - 100000 = 115000 \times 1{,}03^n - 100000$

e) A l'aide de la calculatrice, $C_8 \approx 45678$ et $C_9 \approx 50048$. $1{,}03 > 1$ donc la suite géométrique $\left(V_n\right)$ est croissante. Comme $C_n = V_n - 100000$, la suite $\left(C_n\right)$ est également croissante. Donc, c'est au bout de 9 ans que le capital du compte A dépassera 50000€.

f) $1{,}03 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}03^n = +\infty$ et ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n = +\infty$

2°) On passe d'un terme au suivant en doublant donc la suite $\left(u_n\right)$ est géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 3$.

Ainsi, $u_n = u_0 \times 2^n = 3 \times 2^n$

$$T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{u_{n+1} - u_0}{2-1} = 3 \times 2^{n+1} - 3$$

3°) $C_{14} \approx 73948$ et $T_{14} = 98301$. Le compte B est donc plus intéressant. Bertrand a fait le meilleur choix.

Exercice 2 :

1. On ne peut pas diviser par zéro donc 1 n'a pas d'image par f d'où $D_f =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

En l'infini on a une forme indéterminée or $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = \frac{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x \times \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$

comme $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

De même en $-\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Au voisinage de 1: $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 - 2x + 5\right) = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} (x - 1) = 0^+$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ (par quotient)

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x - 1) = 0^+$ d'où $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$

2. Dérivée et variation :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = \frac{u(x)}{v(x)}$$

d'où $f'(x) = \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v^2(x)} = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 5) \times 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$

Sur D_f $(x-1)^2 > 0$ donc le signe de f'(x) est celui du trinôme $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ qui est positif à l'extérieur de ces deux racines -1 et 3.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
Signe de f'(x)		+	0	-	||	-	0	+	
Variations de f	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

3.Pour tout x de D_f $x-1+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{(x-1)^2+4}{x-1}=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}=f(x)$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))==\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x-1}=0$. De même en $-\infty$.

Donc la droite (D) d'équation $y=x-1$ est une asymptote à C_f.

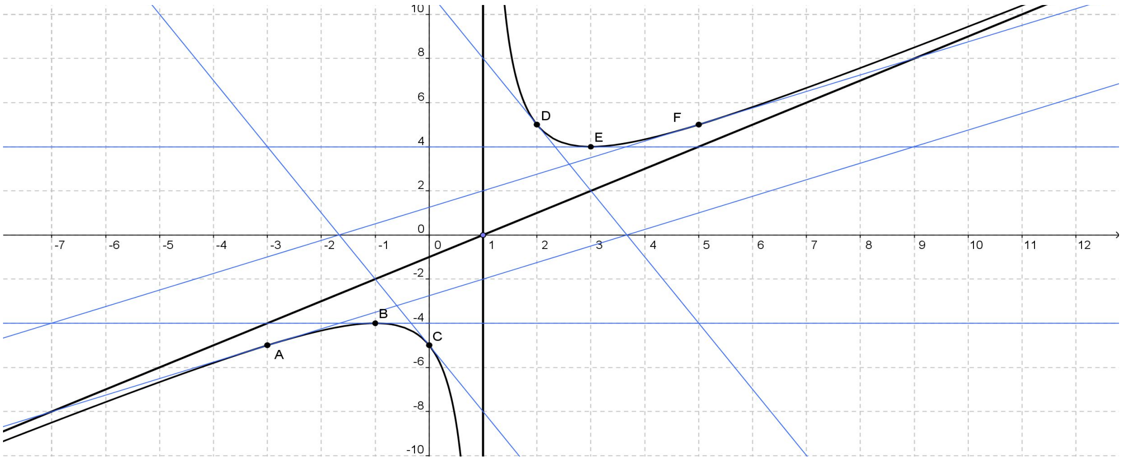
4. Pour étudier la position de Cf par rapport à (D) on étudie le signe de f(x) –(x-1)=4/(x-1)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de f(x)-(x-1)	-	||	+
Positions de f	**Cf est au dessous de (D)**	||	**Cf est au dessus de (D)**

5.

	A	B	C	D	E	F
x	-3	-1	0	2	3	5
$f(x)$	-5	-4	-5	5	4	5
$f'(x)$	0,75	0	-3	-3	0	0,75

6.



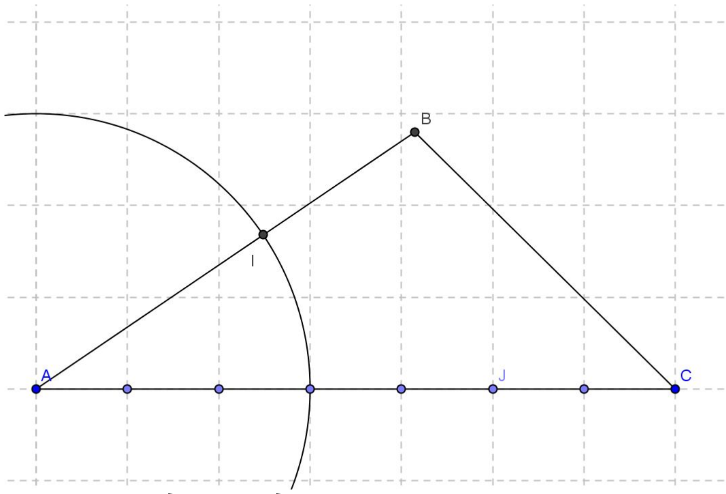
7. Dans l'étude on a montré que pour des valeurs très grande de x, la fonction f se comporte comme la fonction affine
x $\to$ x – 1 donc $f(1000)\approx 1000-1\approx 999$

Exercice 3 :

a) I le barycentre des deux points pondérés (A;4) et (B;6) .

Donc $4\overrightarrow{AI}+6\overrightarrow{BI}=\vec{0}$ d'où $4\overrightarrow{AI}+6\overrightarrow{BA}+6\overrightarrow{AI}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $10\overrightarrow{AI}+6\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AI}=\dfrac{6}{10}\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

comme AB = 5 unités I est sur [AB] à 3 unités de A;



b) Trouver une relation entre $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ}$

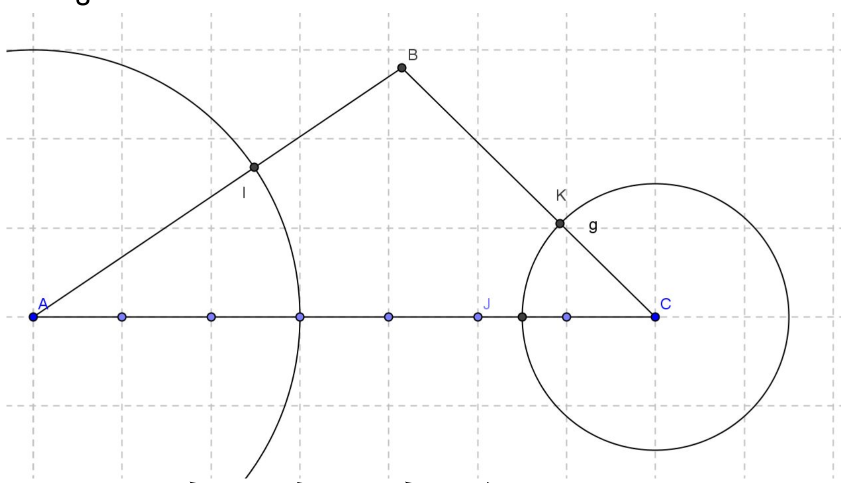
$\overrightarrow{AJ} = \dfrac{5}{7}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AJ} + 5\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AJ} + 5\overrightarrow{CJ} = \vec{0}$ Donc J barycentre de A(2) et C(5). $\{2+5 \neq 0\}$

c) Prouver que le point K est un barycentre pour les points pondérés B et C. On indiquera les coefficients de pondération

de ces derniers. Placer le point K sur la figure.

Comme $8 \cdot \overrightarrow{BK} + 5 \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow 8\overrightarrow{BK} + 5\overrightarrow{CK} + 5\overrightarrow{KB} + \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} + 5\overrightarrow{CK} = \vec{0}$ Donc K barycentre de B(3) et C(5). $\{3+5 \neq 0\}$

$\overrightarrow{BK} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{BC}$ Donc $BK = \dfrac{5}{8} \times 4$ unités donc BK=2,5 unités d'où CK= 1,5 unités



d) En utilisant la relation $2 \cdot \overrightarrow{LA} + 3 \cdot \overrightarrow{LB} + 5 \cdot \overrightarrow{LC} = \vec{0}$, démontrer que le point L est un barycentre pour les points B et J. On précisera les coefficients de pondération de ces derniers.

$2\overrightarrow{LJ} + 2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{LJ} + 5\overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{LB} = \vec{0} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{LJ} + 2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{LB} = \vec{0} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{LJ} + 3\overrightarrow{LB} = \vec{0}$ puisque $2\overrightarrow{AJ} + 5\overrightarrow{CJ} = \vec{0}$

donc L barycentre de J(7) et B(3).

e) Démontrer que le point L est le milieu du segment [IC].

Comme $2 \cdot \overrightarrow{LA} + 3 \cdot \overrightarrow{LB} + 5 \cdot \overrightarrow{LC} = \vec{0}$ et que I le barycentre des deux points pondérés (A;4) et (B;6) donc I le barycentre des deux points pondérés (A;2) et (B;3).

On obtient L barycentre de I(2+3) et C(5). Donc L isobarycentre de I(5) et C(5). L est le milieu du segment [IC].

f) Prouver que les trois droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes.

On vient de démontrer que L est sur la droite (CI).

De même K barycentre de B(3) et C(5) donc L barycentre de K(5+3) et A(2). L est sur la droite (AK)

et J barycentre de A(2) et C(5) donc L barycentre de J(5+2) et B(3). L est sur la droite (BJ)
Donc les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes en L.

Exercice 4 :

1°) Faux . On prend $f(x)=\frac{1}{x}$. f est strictement décroissante sur [1 ; +∞ [mais $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2°) Somme des termes d'une suite arithmétique de raison 1.

$S=\frac{premier+dernier}{2}\times$ nombre de termes = $\frac{1+1000}{2}\times 1000$=500500. Donc Vrai.

3°) Le barycentre de (A,2m+1), (B,m) et (C,-m) existe pour $2m+1+m-m\neq 0$ c'est à dire $m\neq-\frac{1}{2}$.

Donc, ce n'est pas pour tout m réel. Faux

4°) Les coordonnées cartésiennes de B sont $x_B=\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$ et $y_B=\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=1$

I milieu de [AB] a alors pour coordonnées $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+(-1)}{2}=0$ et $y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+1}{2}=1$

C'est donc Vrai.

5°) $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ avec $u(x)=x+1$, $u'(x)=1$, $v(x)=\sqrt{x}$ et $v'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

D'où $f'(x)=1\times\sqrt{x}+\frac{x+1}{2\sqrt{x}}=\frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$. La pente de la tangente au point d'abscisse 1 est $f'(1)=\frac{4}{2}=2$

6°) (E) : $x^2+mx+1=0$ $\Delta=m^2-4$. Avec $m=1$, on a $\Delta=-3$. (E) n'a alors pas de solution pour $m=1$.
C'est donc faux.

7°) Faux . $f(x)>0$ Sur $]-3\,;2[$. Le signe de la dérivée dépend des variations de f.
Ainsi $f'(x)<0$ sur $]-1\,;2[$