Corrigé du devoir commun de Mathématiques - Trimestre 2_SECONDES

EXERCICE 1 : (4 points) Restitution organisée de connaissances

a) Expliquer en quelques mots la différence entre « *l'image d'un nombre par une fonction* » et « *l'antécédent d'un nombre par une fonction* ».

Une fonction numérique est un procédé qui associe à un nombre x pris dans un ensemble donné un autre nombre, unique, noté $f(x)$ et nommé image du nombre x. x est nommé l'antécédent.

Exemple pour la fonction carré : $x \longmapsto x^2$, l'image de 4 est 16 car $4^2=16$. Par contre les antécédents de 4 par cette fonction sont 2 et – 2 car 2 et – 2 ont tous deux pour image 4.

b) Soit f une fonction donnée, définie sur $\mathbb{R}$. Que signifie « Étudier le signe de la fonction f »?

« Étudier le signe de la fonction f », c'est déterminer pour quelles valeurs de la variable x , les images $f(x)$ sont positives, négatives ou nulles.

On doit donc résoudre les inéquations $f(x)>0$; $f(x)<0$ et $f(x)=0$ soit par le calcul soit graphiquement en étudiant la position de la courbe représentative de f par rapport à l'axe des abscisses.

c) A, B , C et D sont quatre points du plan.

Que signifie $\vec{AB} = \vec{CD}$?

Citer plusieurs propositions géométriques équivalentes à cette égalité.

Cette égalité signifie que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ont même direction, même sens et même longueur.

Propositions équivalentes :

- **Le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (ou ACDB … attention à l'ordre des sommets)**
- **Les segments [AD] et [BC] ont le même milieu.**
- **La translation qui transforme A en B , transforme C en D.**

EXERCICE 2 : (5 points) Vrai - Faux

Justifier si les phrases suivantes sont vraies ou fausses :

1) Si a et b sont deux réels alors $a^2-2ab+b^2$ est un nombre strictement positif.

Faux car :

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$. Donc si $a=b$ $a^2-2ab+b^2=0$ n'est pas strictement positif.

2) Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3x-5$ et $g(x)=x^2-x+1$.
Si $x>-4$ alors on a $f(x)\leqslant g(x)$

Faux

Résolvons l'inéquation $f(x)\leqslant g(x)$:

$x^2-3x-5\leqslant x^2-x+1$ **est équivalente successivement à**

$$\begin{aligned} -3x-5 &\leqslant -x+1 \\ -3x+x &\leqslant 5+1 \\ -2x &\leqslant 6 \\ x &\geqslant -3 \end{aligned}$$

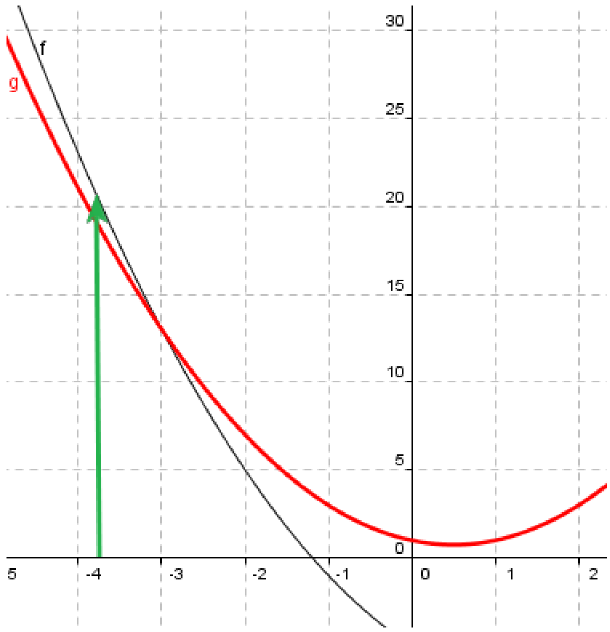
Donc pour tous les nombres strictement compris entre – 4 et – 3 on aura $f(x) > g(x)$

Prenons par exemple ***x*** **= – 3,8 et calculons** ***f*** **(- 3,8) et g (– 3,8) :**

f **(– 3,8) = 20,84**

g (– 3,8) = 19,24

on a donc un nombre , – 3,8 tel que – 3,8 > – 4 et $f(-3,8) > g(-3,8)$

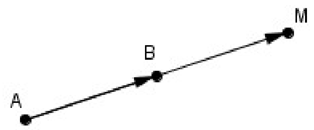


La proposition « Si ***x*** **> –4 alors on a** $\boldsymbol{f(x) \leqslant g(x)}$ **» est donc fausse.**

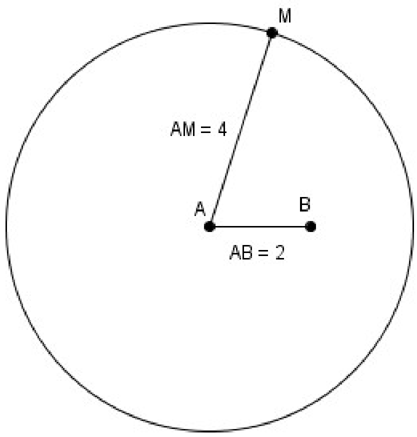
3) Soients A, B et M trois points du plan .

L'une des deux propositions ci-dessous est fausse. La quelle et pourquoi ?

« Si $\overrightarrow{\mathbf{AM}} = 2\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ **alors B est le milieu de [AM]. »**



Cette proposition est vraie ,les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ **et 2** $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ **ont tous deux la direction de la droite (AB), les points A, B et M sont donc alignés . De plus la longueur AM vaut le double de la longueur AB donc B est bien le milieu de [AM]**



« Si $\mathbf{AM = 2\,AB}$ **alors B est le milieu de [AM] »**

Cette proposition est fausse : M appartient au cercle de centre A et de rayon 2 AB.

A, B et M ne sont pas forcément alignés.

EXERCICE 3 : (10 points)

1. Résoudre les équations suivantes :

a) $-2x+3=0$	b) $3x-2=0$	c) $-2x+3=3x-2$
équation équivalente à celles ci-dessous : $-2x+3=0$ $-2x=-3$ $x=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$ donc $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$	équation équivalente à celles ci-dessous : $3x-2=0$ $3x=2$ $x=\frac{2}{3}$ donc $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$	équation équivalente à celles ci-dessous : $-2x+3=3x-2$ $-2x-3x=-2-3$ $-5x=-5$ $x=1$ donc $S=\{1\}$

En déduire les solutions des équations suivantes :

(☺ ***Conseil : Il n'est pas utile de refaire plusieurs fois le même travail mais il faut bien rédiger*****)**

d) $(-2x+3)(3x-2)=0$	**e)** $(-2x+3)^2=0$	**f)** $\frac{-2x+3}{3x-2}=0$	**g)** $\frac{-2x+3}{3x-2}=1$
Nous utilisons la règle du produit nul : $A\times B=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ ou } B=0$ **d'après a) et b) cette équation admet deux solutions :** $S=\left\{\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right\}$	**Même règle qui nous donne une solution « double »** $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$	**Nous utilisons la règle du quotient nul :** $\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0 \text{ et } B\neq 0$ **La valeur interdite est** $\frac{2}{3}$ **.** $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$	**La valeur interdite est** $\frac{2}{3}$ **.** **Le produit en croix et c) nous donne** $S=\{1\}$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\frac{-2x+3}{3x-2}\leqslant 0$

Signe de $-2x+3$	**Signe de $3x-2$**
$-2x+3>0$ $-2x>-3$ $2x<3$; $x<\frac{3}{2}$	$3x-2>0$ $3x>2$; $x>\frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $-2x+3$		+	|	+	0	−	
Signe de $3x-2$		−	0	+	|	+	
Signe du quotient		−	‖	+	0	−	

D'où l'ensemble solution $S=\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

b) $(-2x+3)(3x-2)>0$

même travail que ci-contre

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $-2x+3$		+	|	+	0	−	
Signe de $3x-2$		−	0	+	|	+	
Signe du produit		−	0	+	0	−	

D'où l'ensemble solution $S=\left]\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right[$

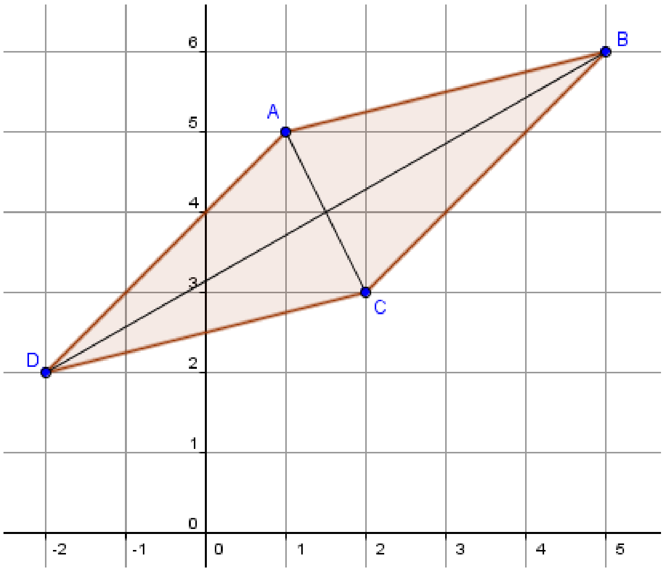
EXERCICE 4 : (10 points)

Les trois parties sont indépendantes

Partie 1

Placer sur le graphique 1 de l'annexe les points suivants :

A(1 ; 5) ; B(5 ; 6) ; C(2 ; 3) et D(– 2 ; 2).



1. Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ?

Utilisons les vecteurs

ABCD est un parallélogramme si et seulement si,

$\vec{AB}=\vec{DC}$ **. Calculons les coordonnées de ces deux vecteurs.**

$\vec{AB}(x_B-x_A; y_B-y_A)$ **donc** $\vec{AB}(5-1;6-5)$

$\vec{AB}(4;1)$

$\vec{DC}(x_C-x_D; y_C-y_D)$ **donc** $\vec{DC}(2-(-2);3-2)$

$\vec{DC}(4;1)$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont égaux puisqu'ils ont les mêmes coordonnées donc le quadrilatère ABCD est bien un parallélogramme.

Remarque : On pouvait aussi vérifier que les diagonales se coupaient en leur milieu.

2. Si oui, ce parallélogramme est-il un losange ?

Calculons les longueurs de deux côtés consécutifs, AB et AD par exemple.

AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}$

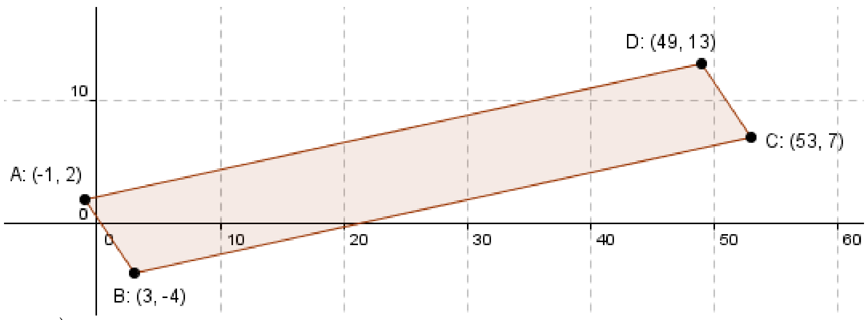
AD = $\sqrt{(x_D-x_A)^2+(y_D-y_A)^2} = \sqrt{(-2-1)^2+(2-5)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{18}$

Deux côtés consécutifs n'ont pas la même longueur donc ABCD n'est pas un losange.

Partie 2

Dans un repère du plan , soient les points

A(–1 ; 2) ; B(3 ; –4) et C(53 ; 7).



a)Calculer les coordonnées du vecteur **$\vec{AB}$**

$\vec{AB}(x_B-x_A; y_B-y_A)$ **donc** $\vec{AB}(3-(-1);-4-2)$

$\vec{AB}(4;-6)$

b)Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si, $\vec{AB}=\vec{DC}$ **.**

Nous venons de calculer les coordonnées de $\vec{AB}$. Exprimons les coordonnées du vecteur $\vec{DC}$ en fonction des coordonnées des points D et C.

$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D; y_C - y_D)$; $\overrightarrow{DC}(53 - x_D; 7 - y_D)$.

$\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{DC}$ **sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées donc on résout le système suivant**

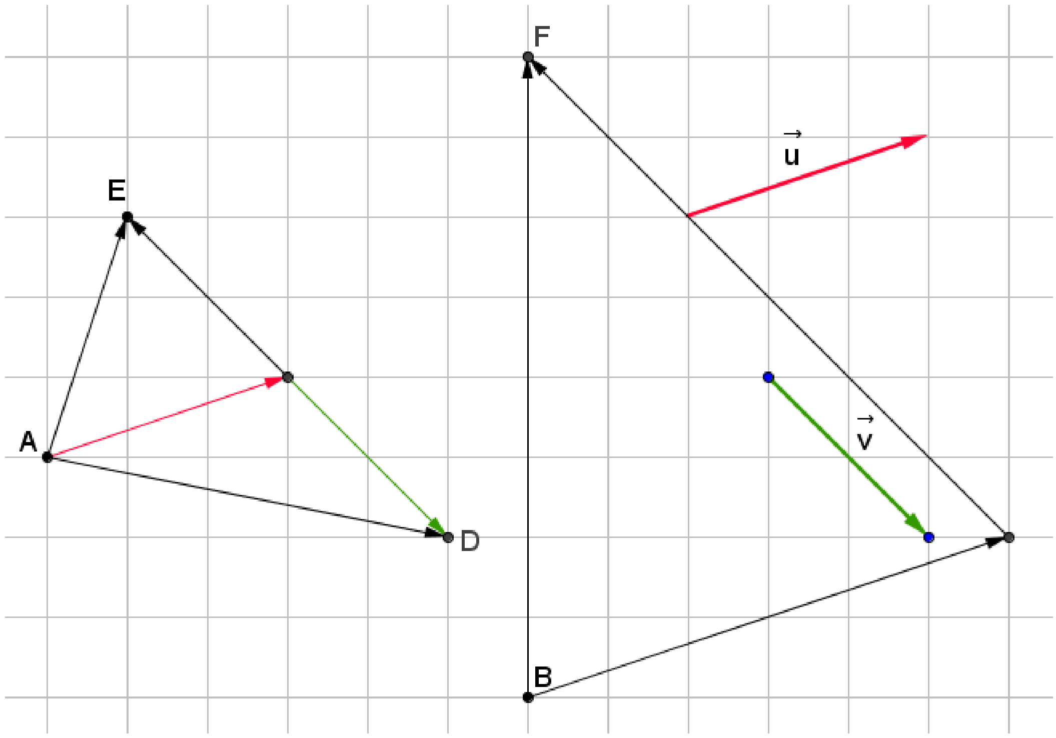
$\begin{cases} 53 - x_D = 4 \\ 7 - y_D = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 53 - 4 = x_D \\ 7 + 6 = y_D \end{cases}$ **donc** x_D **= 49 et** y_D **=13**

Les coordonnées du point D sont D(49 ; 13)

Partie 3

Sur le graphique 2 de l'annexe, construire les points D, E et F tels que

$\overrightarrow{\mathbf{AD}} = \vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{\mathbf{AE}} = \vec{u} - \vec{v}$, $\overrightarrow{\mathbf{BF}} = \overrightarrow{2u} - \overrightarrow{3v}$,



EXERCICE 5 : (4 points)

1. Soit la série statistique des notes obtenues par les élèves d'une classe :

notes	5	8	10	12	13	16
effectifs	3	6	7	8	4	2

Plusieurs réponses sont proposées. Donner la (ou les) bonne(s) réponse(s) en justifiant.

Le menu « STAT » de la calculatrice permet de vérifier les résultats ci-dessous

		R1	R2	R3
1	La moyenne des notes, arrondie au centième, est	10,67	10	**10,43**
2	La médiane de la série est	11	**10**	10,4
3	Le premier quartile est	6	**8**	**une note telle que au moins 25 % des notes lui sont inférieures ou égales**
4	Le troisième quartile est	**une note telle que au moins 75 % des notes lui sont inférieures ou égales**	une note telle que 75 % des notes lui sont inférieures ou égales	**12**

Justifications

Calcul de l'effectif total $N=3+6+7+8+4+2=30$

$$\bar{x}=\frac{3\times5+6\times8+7\times10+8\times12+4\times13+2\times16}{30}\approx10{,}43$$

Notes	5	**Q1 =8**	**Médiane =10**	**Q3 =12**	13	16
Effectifs	3	6	7	8	4	2
Effectifs cumulés croissants	3	**9**	**16**	**24**	28	30

Notes rangées dans l'ordre croissant pour comprendre

5 ; 5; 5 ; 8 ; 8 ; 8; 8 ; 8; ;8 ;10 ; 10;10;10;10;10; 10;12;12;12;12;12;12;12;12;13;13;13;13;16;16

Pour la médiane , on divise l'effectif total par deux : au moins 15 notes sont inférieures ou égales à la médiane et au moins 15 notes lui sont supérieures ou égales.

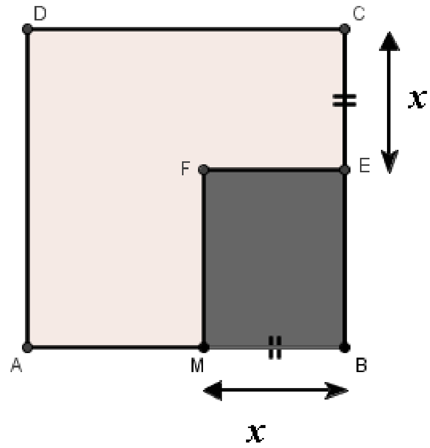
Pour le premier quartile , on partage à nouveau les 15 premières notes en deux , Q1 est la huitième valeur.

(ou aussi $\frac{30}{4}=7{,}5$ **donc huitième valeur)**

Pour le troisième quartile , on partage à nouveau les 15 dernières notes en deux, Q3 est la vingt-troisième valeur.

(ou aussi $\frac{3}{4}\times30=22{,}5$ **donc vingt-troisième valeur)**

EXERCICE 6 : (8 points)



Dans un local de forme carrée ABCD de 8 m de côté , on veut créer une pièce rectangulaire MBEF comme l'indique la figure ci-contre (M appartient au segment [AB], E appartient au segment [BC], tel que EC = MB).

On pose MB = x

1. Donner sous forme d'intervalle les valeurs possibles de x.

M appartient au segment [AB] donc x varie entre 0 et 8.

Mais on peut exclure les valeurs 0 et 8 car dans ce cas la pièce serait inexistante donc $x \in]0;8[$

2. Déterminer en fonction de x l'aire du rectangle MBEF

$Aire(MBEF) = MB \times EB = x \times (8-x) = 8x - x^2$

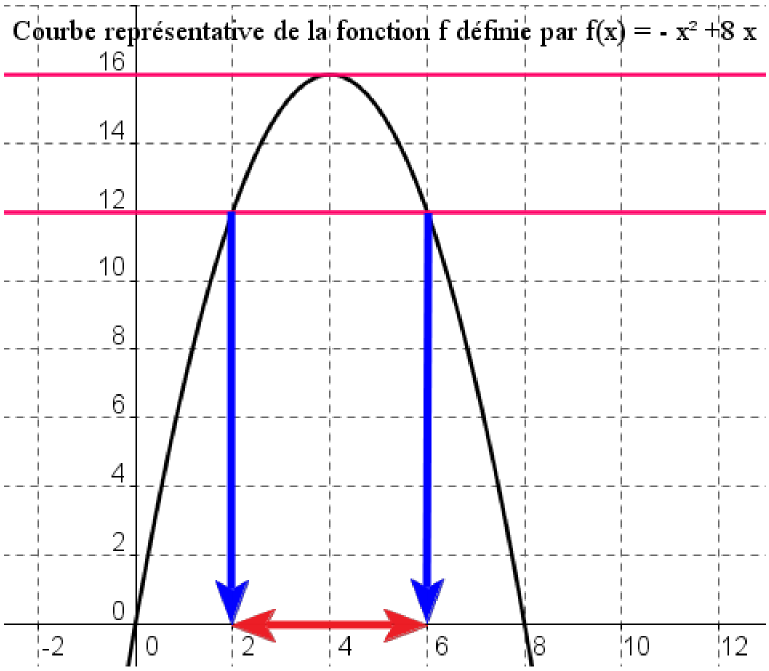
On souhaite obtenir une pièce MBEF ayant une superficie comprise entre 12 et 16 m².

On cherche donc les positions du point M qui satisfont à cette contrainte.

3. Écrire les deux inéquations qui traduisent le problème.

On doit avoir $8x - x^2 \geqslant 12$ **et** $8x - x^2 \leqslant 16$

4. Résoudre le problème en expliquant la démarche.



A l'aide de la courbe ci-contre, on peut conjecturer que l'aire est toujours inférieure ou égale à 16 et que l'aire est supérieure à 12 lorsque x est compris entre 2 et 6

Prouvons-le algébriquement :

Résolution de l'inéquation $8x - x^2 \geqslant 12$ en utilisant la factorisation $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$

$$\begin{aligned} 8x - x^2 &\geqslant 12 \\ 0 &\geqslant -8x + x^2 + 12 \\ x^2 - 8x + 12 &\leqslant 0 \\ (x-6)(x-2) &\leqslant 0 \end{aligned}.$$

On dresse donc un tableau de signe en utilisant la propriété suivante pour remplir rapidement ce tableau :

x	$-\infty$ $-\frac{b}{a}$ $+\infty$
Signe de $ax+b$	**– Signe de *a*** **0** **Signe de *a***

x	$-\infty$		**2**		**6**		$+\infty$
Signe de x – 6		–	|	–	**0**	+	
Signe de x – 2		–	**0**	+	|	+	
Signe du produit		+	**0**	–	**0**	+	

On retrouve le résultat conjecturé graphiquement puisque l'ensemble solution de l'inéquation $8x-x^2\geqslant 12$ **est [2 ; 6]**

Résolution de l'inéquation $8x-x^2\leqslant 16$ **en utilisant la piste :** $x^2-8x+16$ **est une identité remarquable.**
On reconnaît en effet le développement de $(x-4)^2$

$$\begin{array}{c} 8x-x^2\leqslant 16 \\ 0\leqslant -8x+x^2+16 \\ x^2-8x+16\geqslant 0 \\ (x-4)^2\geqslant 0 \end{array}$$

, succession d'inéquations équivalentes.

Un carré de nombre réel est toujours positif ou nul donc , tout réel *x* est solution de cette inéquation.
S = $\mathbb{R}$**.**

Conclusion :
La pièce MBEF aura une superficie comprise entre 12 et 16 m² pour toute valeur de MB comprise entre 2 et 6 m