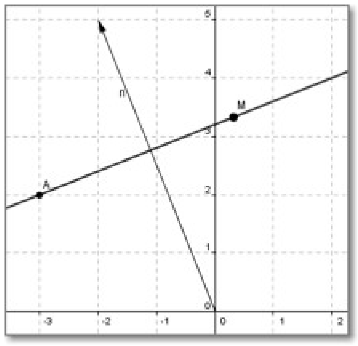
EXERCICE 1 : (4 points) . Applications directes du cours.

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A(-3;2)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}(-2;5)$.



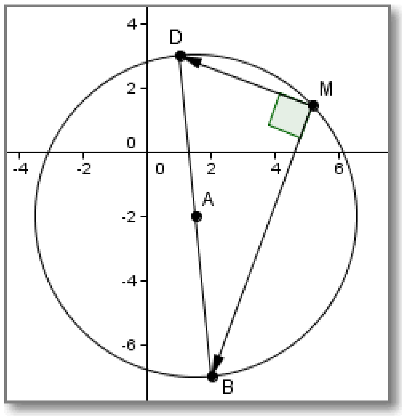
$M(x;y)$ appartient à (d) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

$\overrightarrow{AM}(x-(-3);y-2)$ donc

$$M(x;y)\in(d)\Leftrightarrow -2(x+3)+5(y-2)=0\Leftrightarrow -2x+5y-16=0$$

Une équation cartésienne de la droite (d) est donc $-2x+5y-16=0$

b) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de diamètre [BD] , avec B(2 ; –7) et D(1 ; 3).
On précisera les coordonnées de son centre et son rayon.



$M(x;y)$ appartient à (C) équivaut à $\overrightarrow{MB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{MD}$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

$\overrightarrow{MB}(2-x;-7-y)$ et $\overrightarrow{MD}(1-x;3-y)$ donc

$$M(x;y)\in(C)\Leftrightarrow(2-x)(1-x)+(-7-y)(3-y)=0\Leftrightarrow 2-3x+x^2-21+4y+y^2=0$$

Une équation cartésienne du cercle (C) est donc $x^2-3x+y^2+4y-19=0$

Mettons cette équation sous forme canonique pour faire apparaître centre et rayon.

$x^2-3x=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ **et** $y^2+4y=(y+2)^2-4$

donc $x^2-3x+y^2+4y-19=0$ **équivaut à** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2-\frac{9}{4}-4-19=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{101}{4}$

Le cercle (C) est donc le cercle de centre $A\left(\frac{3}{2};-2\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{101}}{2}$

On pouvait aussi procéder en calculant le rayon $\frac{1}{2}\times BD$ et les coordonnées du centre , milieu de [BD]

EXERCICE 2 : (8 points). Suites numériques.

Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0=900$ et pour tout entier naturel n,

$u_{n+1}=0{,}6\,u_n+200.$

Les questions 1 et 2 sont indépendantes des questions suivantes.

1. Exécuter pas à pas l'algorithme ci-dessous et compléter le tableau. (Le reproduire sur la copie)

```
Code de l'algorithme
▼ VARIABLES
  ├ n EST_DU_TYPE NOMBRE
  ├ u EST_DU_TYPE NOMBRE
  └ i EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├ n PREND_LA_VALEUR 3
  ├ u PREND_LA_VALEUR 900
  ▼ POUR i ALLANT_DE 1 A n
      ├ DEBUT_POUR
      ├ u PREND_LA_VALEUR 0.6*u+200
      ├ AFFICHER u
      └ FIN_POUR
  └ FIN_ALGORITHME
```

n	3			
i	0	**1**	**2**	**3**
u	900	**740**	**644**	**586,4**

Calculs : $u_1=0{,}6u_0+200=0{,}6\times900+200=\mathbf{740}$.

De même $u_2=0{,}6\,u_1+200=0{,}6\times740+200=\mathbf{644}$

et $u_3=0{,}6\,u_2+200=0{,}6\times644+200=\mathbf{586{,}4}$

2.Quel est son rôle ? Donner les valeurs affichées, malencontreusement effacées (écran ci-dessus).

L'algorithme permet de calculer u_1, u_2 , et u_3 et de les afficher comme ci-contre.

```
***Algorithme lancé***
740
644
586.4

***Algorithme terminé***
```

3. A l'aide de la calculatrice, émettre des conjectures sur le sens de variation de (u_n)

n+1	an+1
0	900
1	740
2	644
3	586.4

n+1	an+1
4	551.84
5	531.1
6	518.66
7	511.19

n+1	an+1
8	506.71
9	504.03
10	502.41
11	501.45

n+1	an+1
12	500.87
13	500.52
14	500.31
15	500.18

La suite (u_n) semble décroissante et lorsque *n* devient grand ses termes semblent se stabiliser autour de 500

3 . On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel *n*, par $v_n = u_n - 500$.

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,6 dont on donnera le premier terme.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 0{,}6\,u_n + 200 - 500$ = $0{,}6\,u_n - 300$ = $0{,}6(u_n - 500)$ = $0{,}6\,v_n$

(v_n) **est une suite géométrique de raison 0,6 car on passe d'un terme au suivant en multipliant par le nombre constant 0,6.**

Le premier terme de la suite est $v_0 = u_0 - 500 = 900 - 500$ = 400

b) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire que $u_n = 400 \times (0{,}6)^n + 500$.

Propriété d'une suite géométrique dont on connait le premier terme 400 et la raison 0,6 : $v_n = 400 \times 0{,}6^n$

$u_n = v_n + 500$ **donc** $u_n = 400 \times (0{,}6)^n + 500$

4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Pour tout *n*, déterminons le signe de $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = 400 \times (0{,}6)^{n+1} + 500 - 400 \times 0{,}6^n - 500 = 400 \times 0{,}6^n (0{,}6 - 1)$ = $-0{,}4 \times 400 \times 0{,}6^n < 0$ **car quelque soit *n* entier naturel ,** $0{,}6^n$ **est strictement positif.**

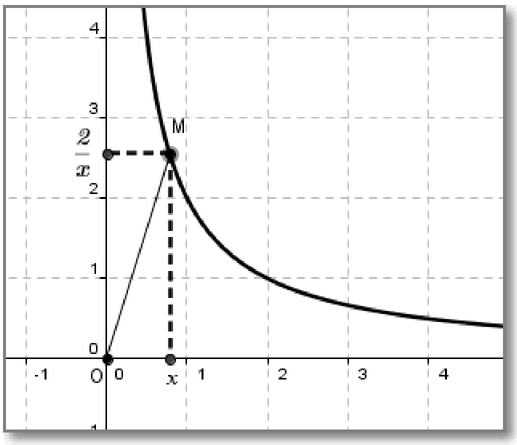
La suite (u_n) est donc décroissante puisque, pour tout *n* entier naturel , $u_{n+1} < u_n$

5. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $u_n > 500$.

$u_n = 400 \times (0{,}6)^n + 500$ donc $u_n - 500 = 400 \times 0{,}6^n > 0$ donc pour tout entier naturel *n*, $u_n > 500$

EXERCICE 3 au choix : (8 points). Étude d'un minimum.

Dans un repère orthonormé (O ; I , J), (H) est l'hyperbole d'équation . $y = \dfrac{2}{x}$.



M est un point quelconque de (H) , d'abscisse x , $x > 0$.

Problème : On cherche à déterminer la position du point M telle que la distance OM soit minimale.

1. On admet que « OM minimale » équivaut à « OM² minimale ».

Démontrer que : $OM^2=\dfrac{x^4+4}{x^2}$

M est un point de de l'hyperbole donc ses coordonnées sont $\left(x;\dfrac{2}{x}\right)$

On peut donc calculer $OM^2=(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2=x^2+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^4}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^4+4}{x^2}$

2. On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^4+4}{x^2}$

a) Calculer la dérivée de *f* sur $]0;+\infty[$ et montrer que $f'(x)=\dfrac{2(x^2-2)(x^2+2)}{x^3}$

f **est de la forme** $\dfrac{u}{v}$ **donc la dérivée** f' **est de la forme** $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

$f'(x)=\dfrac{4x^3\times x^2-2x\times(x^4+4)}{x^4}=\dfrac{4x^5-2x^5-8x}{x^4}=\dfrac{2x^5-8x}{x^4}=\dfrac{2x(x^4-4)}{x^4}=\dfrac{2(x^4-4)}{x^3}=\dfrac{2(x^2+2)(x^2-2)}{x^3}$

(en effet $x^4-4=(x^2)^2-2^2$ **)**

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de *f*.

Le signe de la dérivée dépend du signe de x^3 **et de** x^2-2 **(2 est un nombre positif et** x^2+2 **aussi)**
On a donc le tableau suivant

x	**0**		$\sqrt{2}$		$+\infty$	**Justifications**
signe de x^3		+		+		x^3 **peut s'écrire** $x^2\times x$ **donc** x^3 **est du signe de *x*, donc positif sur** $]0;+\infty[$ **.**
signe de x^2-2		–	**0**	+		x^2-2 **peut s'écrire** $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ **donc le polynôme du second degré est positif sauf entre les racines**
Signe de $f'(x)$		–	**0**	+		
Variations de $f(x)$		↘	**4**	↗		$f(\sqrt{2})=\dfrac{(\sqrt{2})^4+4}{(\sqrt{2})^2}=\dfrac{8}{2}=4$

3. f admet un minimum pour $x=\sqrt{2}$ car la dérivée s'annule en changeant de signe. Ce minimum vaut $f(\sqrt{2})$ = 4.

Donc OM est minimale pour $x=\sqrt{2}$. Comme, dans ce cas, $OM^2=4$ et que OM est un nombre positif on a $OM=2$

EXERCICE 3 au choix : (8 points). Probabilités.

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques de trois couleurs différentes : rouge,blanc et vert.
Un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe ; chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant

ce repère.
Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 €.

Si le secteur repéré est blanc , le joueur perd 12 €.

Si le secteur repéré est vert, il lance une seconde fois la roue :

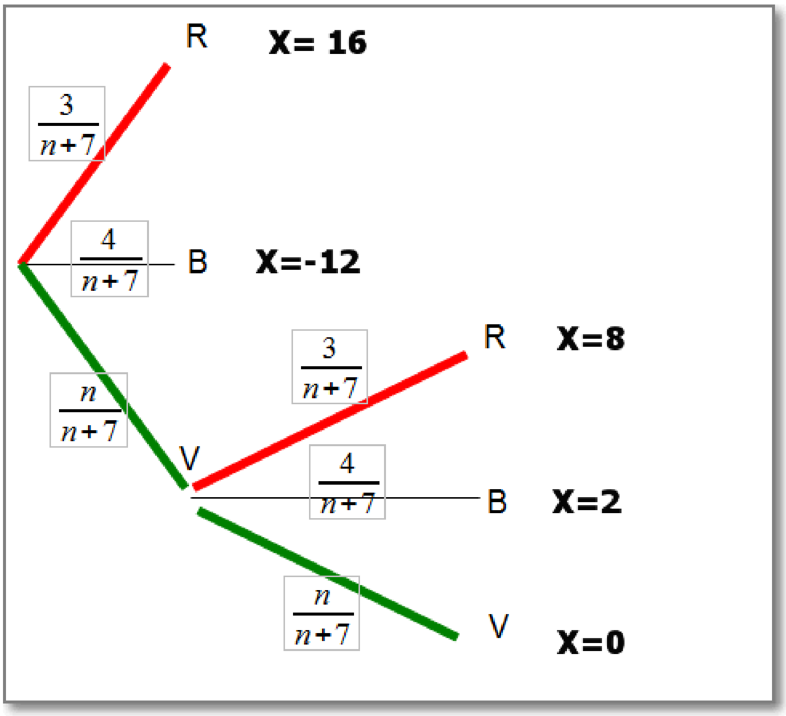
- si le secteur repéré est rouge, il gagne 8 €.
- s'il est blanc, il gagne 2 €.
- s'il est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.

La roue se compose de trois secteurs rouges, quatre secteurs blancs et n secteurs verts (avec $n \geqslant 1$).
Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.

1. Exprimer en fonction de n, le nombre total de secteurs.

Le nombre total de secteurs est $n+7$

2. Faire un arbre de probabilités qui schématise clairement l'expérience aléatoire.



Les probabilités se multiplient le long d'un chemin.
On a par exemple :

$$p(X=8)=p(V\cap R)=\frac{n}{n+7}\times\frac{3}{n+7}$$
$$=\frac{3n}{(n+7)^2}$$

3. Déterminer la loi de probabilité de X_n.

L'arbre ci-dessus nous permet d'établir la loi de la variable aléatoire X_n :

Valeurs possibles pour X_n : x_i	**–12**	**0**	**2**	**8**	**16**
$p(X_n=x_i)$	$\frac{4}{n+7}$	$\frac{n^2}{(n+7)^2}$	$\frac{4n}{(n+7)^2}$	$\frac{3n}{(n+7)^2}$	$\frac{3}{n+7}$

4. Montrer que l'espérance mathématique de X_n est $E(X_n)=\frac{32n}{(n+7)^2}$.

$$E(X_n)=\frac{-12\times4}{n+7}+\frac{2\times4n}{(n+7)^2}+\frac{8\times3n}{(n+7)^2}+\frac{16\times3}{(n+7)}=\frac{-48(n+7)+8n+24n+48(n+7)}{(n+7)^2}=\frac{32n}{(n+7)^2}$$

5. Déterminer la valeur de l'entier n pour laquelle l'espérance mathématique de X_n est maximale.
Quelle est cette valeur maximale de l'espérance ?

Introduisons la fonction *f* définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{32x}{(x+7)^2}$ et étudions ses variations.

$$f'(x)=\frac{32(x+7)^2-32x(2x+14)}{(x+7)^4}=\frac{32(x+7)(x+7-2x)}{(x+7)^4}=\frac{32(x+7)(-x+7)}{(x+7)^4}$$

x	1 7 $+\infty$	Justifications
Signe de f '(x)	$+$ 0 $-$	$f'(x)$ est du signe de $-x+7$ car les autres facteurs sont strictement positifs sur $[1;+\infty[$
Variations de f	$\frac{32}{64}$ ↗ $\frac{8}{7}$ ↘	

L'espérance est donc maximale pour $n=7$ et vaut alors $\frac{8}{7}$ euros