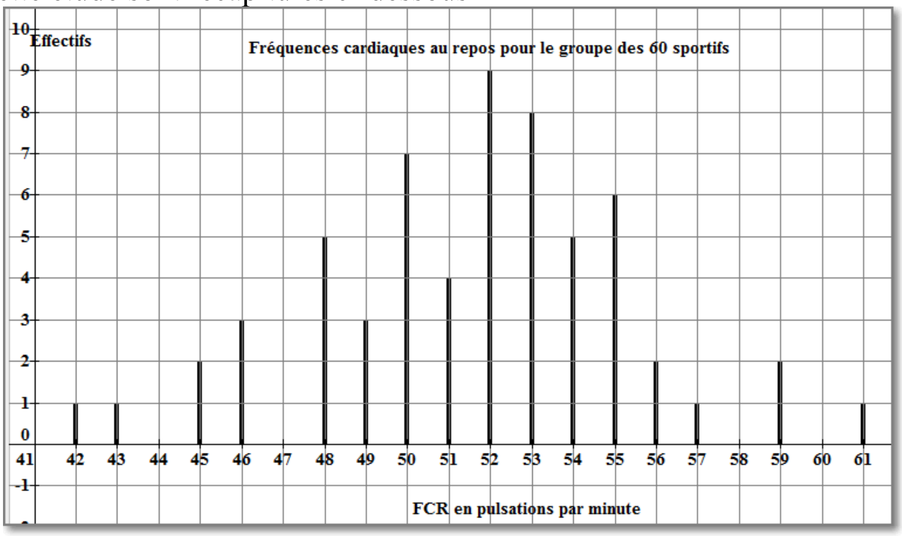
Corrigé du devoir commun de Mathématiques du deuxième trimestre

Premières S. Année scolaire 2011 - 2012

EXERCICE 1 : (5 points). Statistique descriptive.

1. L'entraineur d'un groupe de 60 sportifs a étudié la fréquence cardiaque au repos (FCR) de ces sportifs. Les résultats de cette étude sont récapitulés ci-dessous



En s'inspirant d'un modèle statistique, l'entraineur se fixe comme objectif de ne garder que 95 % des membres du groupe.

a) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de cette série de FCR. On donnera et on utilisera pour la suite, les valeurs arrondies à 0,1 près.

On dresse le tableau des effectifs :

FCR	42	43	45	46	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	59	61
Effectif	1	1	2	3	5	3	7	4	9	8	5	6	2	1	2	1

Puis on calcule la moyenne $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i}{N}=\frac{1\times 42+1\times 43+...+1\times 61}{60}\approx 51{,}6$

L'écart-type est la racine carrée de la variance; $\sigma=\sqrt{V}$ **et** $V=\frac{\sum_{i=1}^{i=p} n_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$

On obtient après calculs ou menu STAT de la calculatrice : $\sigma\approx 3{,}7$

b) L'entraineur décide de sélectionner les sportifs dont la FCR appartient à l'intervalle $[\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma]$. Calculer le pourcentage de sportifs non sélectionnés. Son choix est-il judicieux ?

On utilise les valeurs arrondies au dixième pour les calculs :

$\bar{x}-2\sigma=51{,}6-2\times 3{,}7=44{,}2$ **et** $\bar{x}+2\sigma=51{,}6+2\times 3{,}7=59$

Il y a trois sportifs dont la FCR n'appartient pas à l'intervalle [44,2 ; 59].

$\frac{3}{60}=0{,}05$ **: Le pourcentage de sportifs non sélectionnés est donc 5%**

L'entraineur a atteint son objectif de 95% de sélectionnés, par contre son choix n'est peut-être pas judicieux, en ce sens qu'il a écarté deux joueurs ayant une FCR basse et qu'il a gardé des joueurs ayant une FCR plus élevée. Voir fin de l'exercice.

2. Le médecin chargé de suivre le groupe des sportifs décide de comparer cette série avec celle obtenue avec un groupe de 60 personnes ne pratiquant aucune activité sportive.

L'étude des FCR des personnes de ce deuxième groupe a donné les résultats ci-dessous :

Moyenne	Écart-type	Médiane	Q1	Q3	Minimum	Maximum
59,8	6,23	60	56	63	45	70

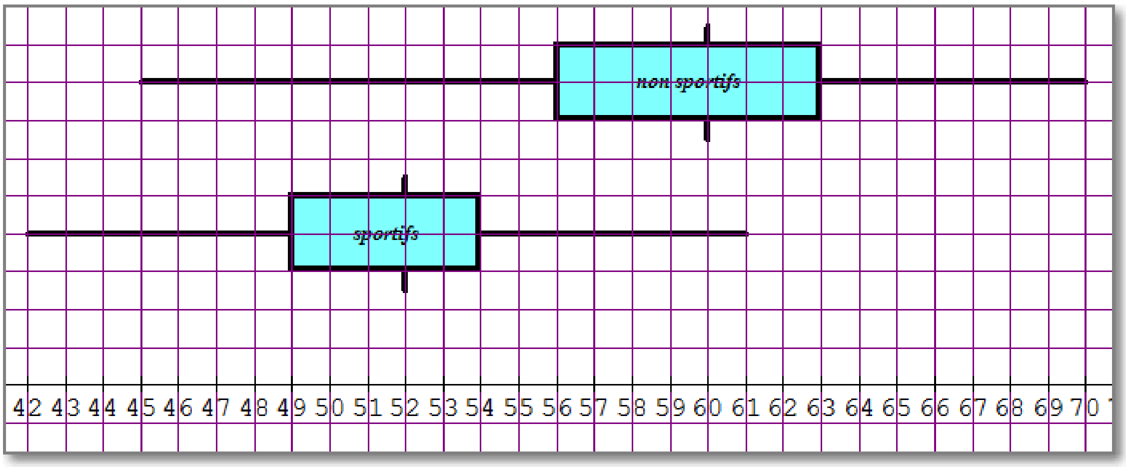
a) Tracer sur l'annexe les diagrammes en boite des deux séries

Pour les calculs des quartiles de la série des sportifs, on utilise les effectifs cumulés croissants.

FCR	**42**	**43**	**45**	**46**	**48**	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**59**	**61**
Effectif	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**3**	**7**	**4**	**9**	**8**	**5**	**6**	**2**	**1**	**2**	**1**
ECC	**1**	**2**	**4**	**7**	**12**	**15**	**22**	**26**	**35**	**43**	**48**	**54**	**56**	**57**	**59**	**60**

Q1 est la 15 ième valeur(car $\frac{60}{4}=15$ **) donc** $Q1=49$ **, Med est la demi-somme entre la trentième et la trente et une ième valeur(car** $\frac{60}{2}=30$ **)donc** $Med=52$ **, Q3 est la 45 ième valeur(car** $3\times\frac{60}{4}=45$ **) donc** $Q3=54$

On peut ainsi tracer les deux diagrammes en utilisant une gradation commune pour faciliter la comparaison.



b) A partir de ces données, expliquer quelle incidence semble avoir la pratique régulière d'une activité sportive sur la FCR d'un individu.

La pratique régulière d'une activité sportive semble faire baisser la fréquence cardiaque au repos.
La valeur médiane de la FCR est plus basse pour les sportifs (52 au lieu de 60)
Au moins 75 % du groupe des sportifs ont une FCR inférieure ou égale à 54 alors qu'au moins 50 % des non sportifs ont une FCR comprise entre 56 et 63.

c) Quel est le pourcentage de sportifs sélectionnés dont la FCR appartient à l'intervalle interquartile de la série des non-sportifs ?

L'intervalle interquartile de la série des non-sportifs est [56 ; 63].
Il y a 5 sportifs sélectionnés sur 57 dont la FCR appartient à cet l'intervalle interquartile .
$\frac{5}{57}\approx 0{,}09$ **. Parmi les sportifs sélectionnés, 9 % ont une FCR appartenant à l'intervalle interquartile de la série des non-sportifs .**

Au vu de ce résultat, quel choix feriez-vous si vous étiez à la place de l'entraineur avec le même objectif des 95 % de sportifs sélectionnés ?

Il serait plus judicieux de sélectionner les 57 joueurs ayant la FCR la plus basse.

EXERCICE 2 : (7, 5 points). Trigonométrie

Partie 1 : Vrai faux

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant :

1. $\sin(2x)=1$ équivaut à $\sin(x)=\frac{1}{2}$

Cette équivalence est fausse . Contre-exemple avec $x=\frac{\pi}{6}$ **:**

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ **alors que** $\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 1$

2. L'équation $\sin(x)=\frac{5}{4}$ admet deux solutions dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$

Attention !!!!Cette affirmation est fausse car $\frac{5}{4}$ **est plus grand que 1 donc ne peut pas être le sinus d'un réel**

3. Le réel $\frac{-53\pi}{15}$ est solution de l'équation $2\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)-1=0$

Calculons ...

$$2\sin\left(\frac{-53\pi}{15}+\frac{\pi}{5}\right)-1=2\sin\left(\frac{-53\pi}{15}+\frac{3\pi}{15}\right)-1=2\sin\left(\frac{-50\pi}{15}\right)-1=2\sin\left(\frac{-10\pi}{3}\right)-1$$

Déterminons la mesure principale de $\frac{-10\pi}{3}$

$\frac{-10\pi}{3}=\frac{-12\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=-4\pi+\frac{2\pi}{3}$ **donc la mesure principale de** $\frac{-10\pi}{3}$ **est** $\frac{2\pi}{3}$

Donc $2\sin\left(\frac{-10\pi}{3}\right)-1=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)-1=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\sqrt{3}-1\neq 0$

Le réel $\frac{-53\pi}{15}$ **n' est pas solution de l'équation** $2\sin\left(x+\frac{\pi}{5}\right)-1=0$

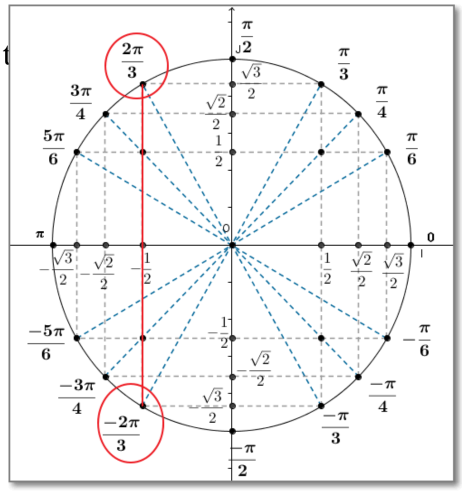
Partie 2 : Équation trigonométrique

a) Résoudre dans ℝ l'équation $\cos(x)=\frac{-1}{2}$

$\cos(x)=\frac{-1}{2}$ **équivaut à** $\cos x=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

D'après le cours $\cos x=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ **équivaut à** $\begin{cases} x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \\ ou \\ x=\frac{-2\pi}{3}+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

b) Placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux solutions t



c) Donner les solutions appartenant à $[-2\pi;4\pi]$

pour les solutions de la forme $\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ **,** $k=0$ **donne** $\frac{2\pi}{3}$ **,** $k=1$ **donne** $\frac{8\pi}{3}$ **;** $k=-1$ **donne** $\frac{-4\pi}{3}$

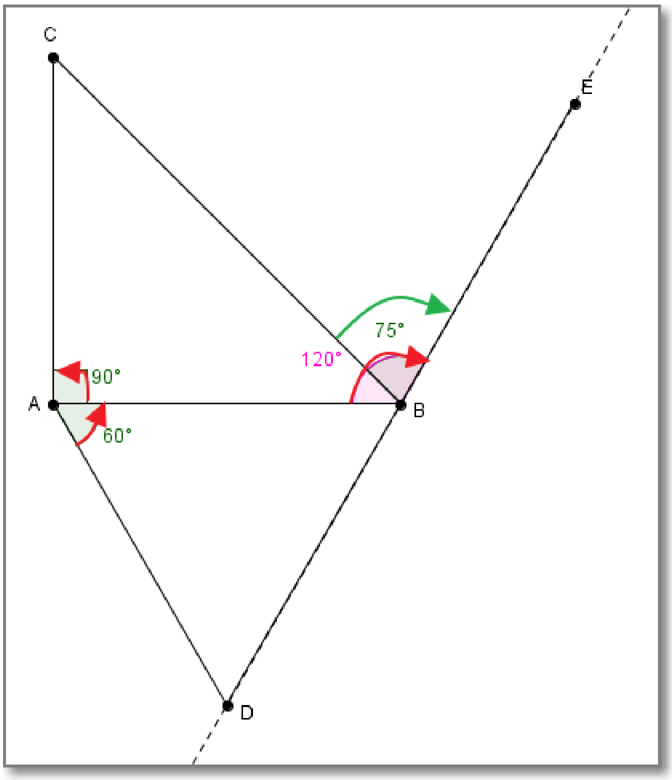
pour les solutions de la forme $\frac{-2\pi}{3}+2k\pi$ **,** $k=0$ **donne** $\frac{-2\pi}{3}$ **,** $k=1$ **donne** $\frac{4\pi}{3}$ **;** $k=2$ **donne** $\frac{10\pi}{3}$

donc $S=\left\{\frac{-4\pi}{3};\frac{-2\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3};\frac{8\pi}{3};\frac{10\pi}{3}\right\}$

Partie 3 : Angles orientés

a) Construire les points A, B , C, D et E correspondant aux informations suivantes :

- Le triangle ABC est rectangle et isocèle , avec AB = 5 cm et une mesure de l'angle $(\vec{AB},\vec{AC})$ est $\frac{\pi}{2}$
- Le triangle ADB est équilatéral et une mesure de l'angle $(\vec{AD},\vec{AB})$ est $\frac{\pi}{3}$
- BE = BA et $(\vec{BA},\vec{BE})=\frac{-2\pi}{3}$.



b) Montrer que les points D, B et E sont alignés

$(\vec{BD},\vec{BE})=(\vec{BD},\vec{BA})+(\vec{BA},\vec{BE})=\frac{-\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=-\pi$

donc les points D, B et E sont alignés

c) Donner la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{BC},\vec{BE})$

$(\vec{BC},\vec{BE})=(\vec{BC},\vec{BA})+(\vec{BA},\vec{BE})=\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{12}-\frac{8\pi}{12}=\frac{-5\pi}{12}$

EXERCICE 3 : (7, 5 points) . Fonctions, dérivation et tangentes.

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. Soit une fonction *f* dérivable en a , a réel donné . Donner la définition du nombre dérivé en a .

Définition du cours

Soit f **une fonction définie sur un intervalle I ;** a **et** $a+h$ **deux réels de I avec *h* ≠ 0.**

f **est dérivable en** a **signifie que :**

lorsque *h* tend vers 0 , $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ **admet une limite finie notée** $f'(a)$ **qui est le nombre dérivé en a. On écrit** $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

2. On considère la fonction carré définie sur ℝ par $f(x)=x^2$. Démontrer que $f'(x)=2x$

Soit *a* un réel quelconque, montrons que $f'(a)$ existe et est égal à $2a$.
Pour tout nombre $h\neq 0$ on calcule le taux d'accroissement $T(h)$ de f entre *a* et *a*+*h* :

$$T(h)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=\frac{h(2a+h)}{h}=2a+h$$

Faisons tendre *h* vers zéro : $2a+h$ tend vers $2a$ lorsque *h* tend vers 0.
Donc par définition, *f* est dérivable en *a* et $f'(a)=2a$
Ceci étant vrai pour tout *a* réel, *f* est dérivable sur ℝ et sa dérivée est définie sur ℝ par $f'(x)=2x$

Partie 2 : on complétera le graphique sur l'annexe au fur et à mesure des questions

Soit la fonction *g* définie par $g(x)=\frac{2}{x}$, C_g sa courbe représentative dans un repère du plan et sa dérivée définie par $g'(x)=\frac{-2}{x^2}$.

1. Préciser l' ensemble de définition de *g* et g'

Les expressions algébriques des fonctions g et g' sont des quotients de fonctions définies sur ℝ. Donc les seules valeurs interdites sont les valeurs de *x* qui annulent le dénominateur.
$D_g=\mathbb{R}^*$ **(autrement dit ℝ \ {0}) et** $D_{g'}=\mathbb{R}^*$

2. Déterminer les coordonnées des points de la courbe C_g en lesquels la tangente est parallèle à la droite (D) d'équation $y=-2x+3$

L'équation réduite d'une tangente au point d'abscisse *a* de la courbe C_g, est de la forme $y=mx+p$ avec $m=g'(a)$
Si la tangente est parallèle à la droite (D) alors $m=-2$
Donc on cherche les valeurs de *a* tel que $g'(a)=-2$ c'est à dire : $\frac{-2}{a^2}=-2$

$\frac{-2}{a^2}=-2$ **⇔ *a*≠0 et $a^2=1$ ⇔ $a=-1$ ou $a=1$**

Donc les coordonnées des points vérifiant la question sont $(-1;g(-1))=(-1;-2)$ et $(1;g(1))=(1;2)$

3. Soit *a* un réel non nul. Écrire, en fonction de *a*, l' équation réduite de la tangente à C_g au point A d'abscisse *a*

Coordonnées de A $(a;g(a))$ donc $A\left(a;\frac{2}{a}\right)$
L'équation réduite de la tangente est de la forme $y=mx+p$ avec $m=g'(a)$
Donc $m=\frac{-2}{a^2}$ et les coordonnées de A $(a;g(a))$ vérifient l'équation de la tangente.
Donc $\frac{2}{a}=\frac{-2}{a^2}\times a+p$
on en déduit $p=\frac{4}{a}$ et l'équation réduite : $y=\frac{-2}{a^2}\times x+\frac{4}{a}$

4. Soit M le point de coordonnées (–4 ; 4) .
a) Montrer qu'il existe deux tangentes à la courbe C_g passant par M. (Attention M n'est pas un point de la courbe)

On a montré dans la question précédente que l'équation réduite d'une tangente à la courbe C_g est de la forme $y=\frac{-2}{a^2}\times x+\frac{4}{a}$
Cherchons *a* pour que la tangente passe par M(–4 ; 4).
Cela revient à résoudre $4=\frac{-2}{a^2}\times -4+\frac{4}{a}$ ⇔ a≠0 et $4a^2-4a-8=0$ ⇔ (après calcul du discriminant)

$a=-1$ **ou** $a=2$ **.**
Donc il y a bien 2 tangentes à la courbe passant par M(–4 ; 4)

b) Pour chacune d'elles, déterminer les coordonnées du point de contact et en donner une équation.
Les construire.
Les points de contact sont les points N et Q de coordonnées
N $(-1;g(-1))$ **=** $(-1;-2)$ **et Q** $(2;g(2))=(2;1)$
Les équations des tangentes sont respectivement :

$y=-2x-4$ **et** $y=-0{,}5x+2$ **(on remplace *a* par –1 puis par 2 dans** $y=\frac{-2}{a^2}\times x+\frac{4}{a}$ **)**

Bonus : Y a-t-il une ou plusieurs tangentes à C_g passant par P(1 ; 0) ?

On cherche *a* pour que la tangente passe par P, cela revient à résoudre $0=\frac{-2}{a^2}\times 1+\frac{4}{a}$ $\Leftrightarrow$ $4a-2=0$

$\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$ **Donc il y a une seule tangente à la courbe passant par P, elle a pour équation réduite** $y=-8x+8$

et par l'origine O du repère ?
On cherche *a* pour que la tangente passe par l'origine, cela revient à résoudre $0=\frac{4}{a}$ **pas de solution donc pas de tangente.**