BACCALAURÉAT BLANC DU LYCÉE PRÉVERT.

Vendredi 27 janvier 2017

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

SPÉCIALITÉ

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES (8h – 12h)

COEFFICIENT : 9

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Exercice 1 : **5 points**
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

On appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \le x \le a$ et $0 \le y \le b$. On note $R_{a,b}$ ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

Partie A - Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique qui sera dûment complété sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

Représenter graphiquement les points M(x ; y) du réseau $R_{8,8}$ vérifiant :

1. $x \equiv 2$ (modulo 3) et $y \equiv 1$ (modulo 3), sur le graphique 1 de la feuille annexe

2. $x + y \equiv 1$ (modulo 3), sur le graphique 2 de la feuille annexe

3. $x \equiv y$ (modulo 3), sur le graphique 3 de la feuille annexe.

Partie B - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x-4y=1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ solution de l'équation (E).

2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution $(x\,;\,y)$ pour laquelle le point M$(x\,;\,y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$.

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale [OA] du réseau $R_{a,b}$, avec $O(0;0)$ et $A(a;b)$.

1. Démontrer que les points du segment [OA] sont caractérisés par les conditions :

$$0 \le x \le a \quad ; \quad 0 \le y \le b \quad ; \quad ay = bx \quad .$$

2. Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment [OA] appartenant au réseau $R_{a,b}$.

3. Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment [OA] contient au moins un autre point du réseau. (On pourra considérer d le PGCD des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$.)

Exercice 2 : **4 points**

Commun à tous les candidats

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par

$$f(z)=z+\frac{1}{z}$$

On note M le point d'affixe z et M′ le point d'affixe $f(z)$

1. On appelle A le point d'affixe $a=\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$
   a) Déterminer la forme exponentielle de a
   b) Déterminer la forme algébrique de $f(a)$
2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z)=1$
3. Soit M un point d'affixe z du cercle C de centre O et de rayon 1.
   a) Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z=e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel
   b) Montrer que $f(z)$ est un réel
4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96% de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60% de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98%.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :

A : « la bille a été fabriquée par la machine A »;

B : « la bille a été fabriquée par la machine B »;

V : « la bille est vendable ».

1. Traduire l'expérience par un arbre de probabilités pondérées que l'on complétera au fur et à mesure.
2. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
3. Justifier que $P(B\cap V)=0{,}372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.

4. Un technicien affirme que 70% des billes non vendables proviennent de la machine B.

   A-t-il raison?

Partie B
Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets.

La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire. Les sachets sont tous composés de 40 billes.

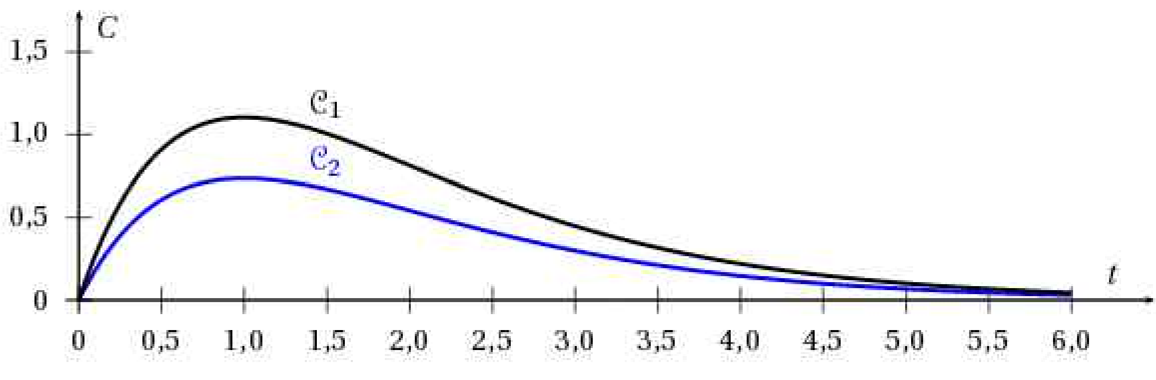
1. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de billes noires dans sachet. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.
3. Calculer $P(15 \leqslant X \leqslant 25)$

Exercice 4 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie A
Voici deux courbes C_1 et C_2 qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t=0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle [0 ;+∞[et on note C′ sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par C′(t).

   À quel instant cette vitesse est-elle maximale?

On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur[0 ;+∞[par $f(t) = \mathrm{A}\, t\, \mathrm{e}^{-t}$ où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

   a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

   b) L'affirmation suivante est-elle vraie? Justifiez

   « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur [0 ;+∞[par $f(t) = 2t\,\mathrm{e}^{-t}$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ;+∞[.
2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
3. Rappeler la limite de $\frac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de f(t) en $+\infty$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0{,}2\, g\,.\,\mathrm{L}^{-1}$ pour un jeune conducteur.

   a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$

   b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité?

   Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à $5\times10^{-3}\, g\,.\,\mathrm{L}^{-1}$

   a) Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

   b) On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2t\,\mathrm{e}^{-t}$

```
Initialisation :   t prend la valeur 3,5
                   p prend la valeur 0,25
                   C prend la valeur 0,21
Traitement :       Tant que C > 5 × 10^-3 faire :
                       | t prend la valeur t + p
                       | C prend la valeur f(t)
                   Fin Tant que
Sortie :           Afficher t
```

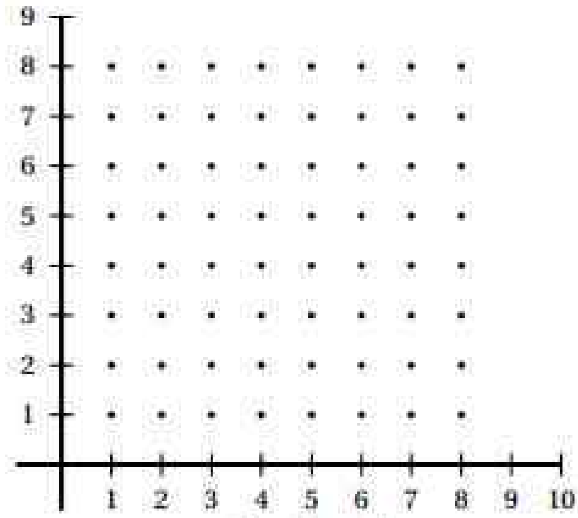
Recopier et compléter le tableau de valeurs ci_contre en exécutant cet algorithme. Arrondir les valeurs à 10^{-2} près

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

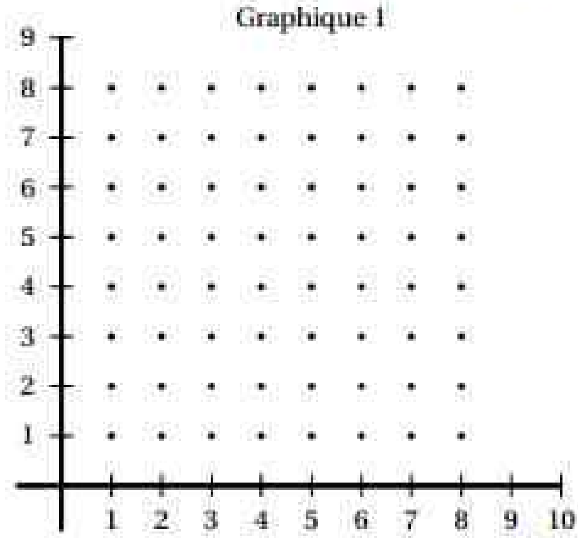
Que représente la valeur affichée par cet algorithme

Feuille annexe à rendre avec la copie

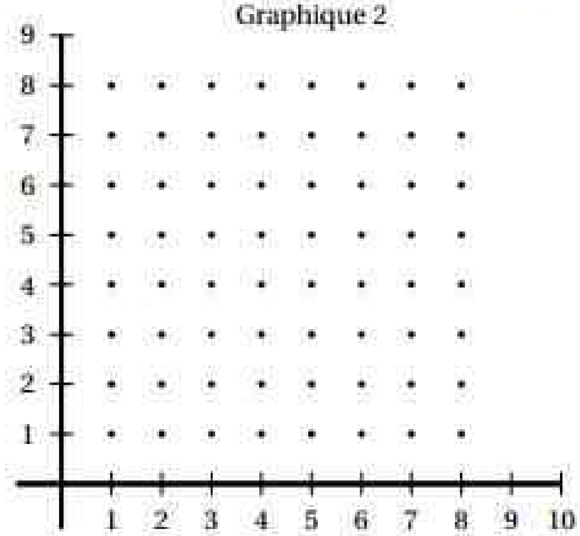
<u>NOM :</u>



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3