BACCALAURÉAT BLANC DU LYCÉE PRÉVERT.

Vendredi 29 janvier 2015

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

SPECIALITE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES (8h – 12h)

COEFFICIENT : 9

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

Exercice 1 : Restitution organisée de connaissances (3 points)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a\,;b]$.

1. Rappeler l'expression de la fonction densité f associée à cette variable aléatoire.

2. *On rappelle dans cette question que l'espérance mathématique associée à la variable aléatoire* X, *notée* E(X), *est donnée par l'aire comprise entre les droites d'équation* $\boldsymbol{x = a, x = b}$, ***l'axe des abscisses*** *et* ***la courbe associée à la fonction*** $\boldsymbol{x \to xf(x)}$
   Démontrer que E(X) = $\frac{a+b}{2}$

3. Application :
   Le temps d'attente pour obtenir un ticket au multiplexe d'Alès, exprimé en minutes, est une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a\,;b]$.
   On sait que le temps moyen d'attente est de 8 minutes et que seules 25% des personnes attendent moins de 5 minutes.
   En déduire les valeurs de a et de b.

Exercice 2 : Vrai ou Faux (4 points)

1. L'équation $\mathbf{ln}(x)+\mathbf{ln}(x+\mathbf{1})=\mathbf{ln}(\mathbf{2})$ admet le réel 1 pour unique solution.

2. Soient $(\boldsymbol{u_n})$ et $(\boldsymbol{v_n})$ deux suites de nombres réels de termes généraux $\boldsymbol{u_n}$ et $\boldsymbol{v_n}$
   Si la suite $(\boldsymbol{u_n v_n})$ diverge alors les suites $(\boldsymbol{u_n})$ et $(\boldsymbol{v_n})$ divergent.

3. On considère les nombres complexes $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = -4i$
   Alors l'écriture algébrique de $\frac{{z_1}^2}{\overline{z_2}}$ est : $\boldsymbol{-1{,}5 - 1{,}25i}$

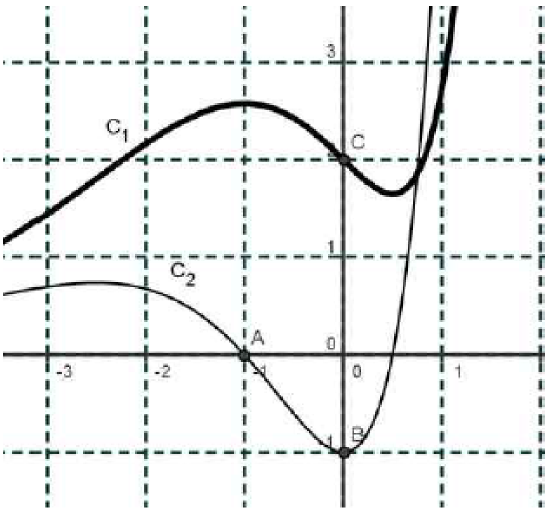
4. Une maladie atteint 1% d'une population donnée.
   Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :
   - Chez les individus malades, 99% des tests sont positifs, les autres étant négatifs.
   - Chez les individus non malades, 98% des tests sont négatifs, les autres étant positifs.

   Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.
   Que pensez-vous de l'affirmation suivante :
   « Sachant que le test est positif, il y a 2 chances sur 3 que l'individu testé ne soit pas malade » ?

Exercice 3 (3 points)

Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes C_1 et C_2 représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
On sait que l'une des fonctions est la dérivée de l'autre.
On note ces fonctions g et g'.
La fonction g est définie par $g(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ où a, b *et* c sont trois nombres.

Déterminez a, b *et* c.



Exercice 4 (5 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g\ (x)\ =\ 2x^3\ -1+2lnx$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Justifier qu'il existe un unique réel α sur l'intervalle $]0; +\infty[$ tel que $g\ (\alpha\ ) = 0$.
   Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.

3. En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f\ (x)\ =\ 2x\ -\frac{lnx}{x^2}$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O\ ; \vec{\imath}\ ; \vec{\jmath}\ )$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et interpréter graphiquement ce résultat.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $g\ (x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

5. Montrer que $f\ (\alpha\ ) = 3\ \alpha\ -\ \frac{1}{2\alpha^2}$.

Exercice 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel non nul *p* :

$$A^p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^p + 2 & 4^p - 1 & 4^p - 1 \\ 4^p - 1 & 4^p + 2 & 4^p - 1 \\ 4^p - 1 & 4^p - 1 & 4^p + 2 \end{pmatrix}$$

Partie B :

1°) On se propose dans cette question, de déterminer tous les nombres entiers relatifs *N* tels que

$$\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$$

a) Vérifier que 239 est solution de ce système.

b) Soit *N* un nombre entier relatif solution de ce système.

Démontrer que *N* peut s'écrire sous la forme : $N = 1 + 17x = 5 + 13y$

où *x* et *y* sont deux nombres entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$

c) Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où *x* et *y* sont des nombres entiers relatifs.

d) En déduire qu'il existe un nombre entier relatif *k* tel que $N = 18 + 221k$.

e) Démontrer l'équivalence entre

$N \equiv 18[221]$ et $\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$

2°) Zoé sait qu'elle possède entre 600 et 700 jetons.

Si elle fait des tas de 13 jetons, il lui en reste 5.

Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 1.

Combien a-t-elle de jetons ?