Bac Blanc ES
Epreuve de Mathématiques
Durée : 3h

L'usage de la calculatrice est autorisé. Il sera tenu compte de la qualité de rédaction et du soin apporté à la copie.

Exercice 1 : 6 points

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

PARTIE A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année.
Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.
A l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2004+n$. On a ainsi $u_0 = 25\,000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes :
   a. au 1er janvier 2005 ;
   b. au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25\,000 \times 0,85^n$.
3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.
   Recopier et compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

L1 :	Variables	u un réel, n un entier
L2 :	Initialisation	u prend la valeur 25 000
L3 :		n prend la valeur 0
L4 :	Traitement	Tant que .... faire
L5 :		u prend la valeur ....
L6 :		n prend la valeur ....
L7 :		Fin Tant que
L8 :	Sortie	Afficher n

4. Montrer que la valeur n affichée après l'exécution de l'algorithme est 10.

PARTIE B

Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.
On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014+n$. On a ainsi $v_0 = 5000$.

1. a. Calculer v_1 et v_2.
   b. justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,75 \times v_n + 400$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1600$.
   a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,75$. Préciser la valeur de w_0.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 1600 + 3400 \times 0,75^n$.
   d. Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.*

Exercice 2 : Candidats n'ayant pas suivi la spécialité et candidats L (4 points)

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif.
L'enquête révèle que 70 % des élèves sont sensibles au développement durable, et, parmi ceux qui sont sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif.
Parmi ceux qui ne sont pas sensibles au développement durable, on en trouve 10 % qui pratiquent le tri sélectif.
On interroge un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

S : L'élève interrogé est sensible au développement durable.

T : L'élève interrogé pratique le tri sélectif.

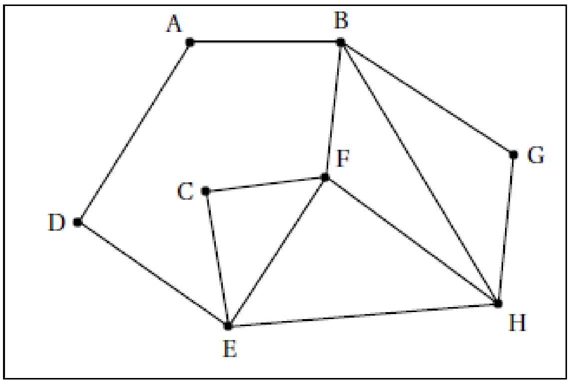
Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'élève interrogé soit sensible au développement durable et pratique le tri sélectif.
3. Montrer que la probabilité $P(T)$ de l'évènement T est $0,59$.
4. On interroge un élève qui ne pratique pas le tri sélectif.
   Peut-on affirmer que les chances qu'il se dise sensible au développement durable sont inférieures à 10 % ?

Exercice 2 : Candidats ayant suivi la spécialité (4 points)

PARTIE A

On considère le graphe $\mathscr{G}$ ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :
   a. est connexe ;
   b. admet une chaîne eulérienne.
2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

   Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.

PARTIE B

Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés.
Le graphe $\mathscr{G}$ de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

1. D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :
   - **a.** un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;
   - **b.** des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?

Partie C

Quel est le degré du sommet H ?

Le graphe est-il complet ? Justifier.

Le graphe admet-il un cycle Eulérien ? Justifier.

Exercice 3 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20.$$

Partie A

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,10]$, $f'(x) = (-2x+7)\mathrm{e}^{-x+4}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
   Si nécessaire, arrondir au millième les valeurs présentes dans le tableau de variation.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,10]$ et déterminer un encadrement d'amplitude $0,01$ de α.
4. Etudier la convexité de la fonction f sur [0 ;10]
5. En déduire l'existence d'un point d'inflexion.

Partie B

Une entreprise fabrique entre 0 et 1 000 objets par semaine.
Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{-x+4} + 20.$$

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et en arrondissant les résultats à l'unité.

1. Quel est le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximum ?
   Quel est ce bénéfice maximal en euros ?
2. À partir de combien d'objets fabriqués et vendus l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice positif ?

Exercice 4 : (5 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2$ est convexe sur l'intervalle :

   a. $]-\infty\,;\,+\infty[$ **b.** $[-2\,;\,+\infty[$ **c.** $]-\infty\,;\,-2]$ **d.** $[-6\,;\,+\infty[$

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-2)e^x$. L'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$:

   a. aucune solution
   b. une seule solution
   c. exactement deux solutions
   d. plus de deux solutions

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

   La valeur affichée en sortie de cet algorithme est :
   a. 7,1
   b. 7,6
   c. 8
   d. 17

   Variables
   n : un nombre entier naturel
   Traitement
   Affecter à n la valeur 0
   Tant que $1,9^n < 100$
   Affecter à n la valeur $n+1$
   Fin Tant que
   Sortie
   Afficher n

4. Une entreprise vendant des parquets flottants s'approvisionne auprès de deux fournisseurs A et B. Le fournisseur A livre 70 % du stock de l'entreprise. On sait que 2 % des pièces livrées par A présentent un défaut et 3 % des pièces livrées par B présentent un défaut.
   On prélève au hasard une pièce du stock de l'entreprise, quelle est la probabilité, que cette pièce soit sans défaut ?

   a. 0,023 **b.** 0,05 **c.** 0,97 **d.** 0,977

5. Le prix d'une action a augmenté chaque mois de 5 % et cela pendant 3 mois consécutifs.
   Globalement, le prix de l'action a été multiplié par :

   a. $1,05^3$ **b.** 1,15 **c.** $3 \times 1,05$ **d.** 1,45