# MATHEMATIQUES

## -SERIE S-

## OBLIGATOIRE

DUREE DE L'EPREUVE : 4 heures

**Matériel autorisé :** Calculatrice graphique programmable

**( Une seule calculatrice sur la table et changement uniquement en cas de panne de piles ! )**

Les candidats doivent traiter les quatre exercices.

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

- Ce sujet comporte 4 pages –

**EXERCICE 1** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, où $\lambda$ est un réel strictement positif.

   On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.

   Déterminer la valeur exacte du réel $\lambda$.

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de $\lambda$.

2. **a.** Déterminer $P(X \geqslant 3)$.

   **b.** Montrer que pour tous réels positifs $t$ et $h$, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.

   **c.** Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

   **d.** Calculer l'espérance de la variable aléatoire $X$ et donner une interprétation de ce résultat.

3. **Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à $10^{-3}$**

   L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.

   Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier. On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

**EXERCICE 2** **5 points**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$
et la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{l} x = \quad 2t \\ y = \ 1+t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -5+3t \end{array}\right.$$

On donne les points $A(1\ ;\ 1;\ 0)$, $B(3\ ;0\ ;-1)$ et $C(7\ ;1\ ;-2)$

**Proposition 1 :**

Une représentation paramétrique de la droite $(AB)$ est $\left\{\begin{array}{l} x = \ 5-2t \\ y = -1+t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -2+t \end{array}\right.$

**Proposition 2 :**
Les droites $\mathscr{D}$ et $(AB)$ sont orthogonales.

**Proposition 3 :**
Les droites $\mathscr{D}$ et $(AB)$ sont coplanaires.

**Proposition 4 :**
La droite $\mathscr{D}$ coupe le plan $\mathscr{P}$ au point $E$ de coordonnées $(8\ ;\ -3;\ -4)$.

**Proposition 5 :**
Les plans $\mathscr{P}$ et $(ABC)$ sont parallèles.

**Exercice 3** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère la fonction $f$ définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

**Partie A**

1. Soit $g$ la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

   Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ (les limites de $g$ aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
   En déduire le signe de $g(x)$.
2. Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$ puis la limite de $f$ en $+\infty$.
3. On appelle $f'$ la dérivée de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel $x$,

$$f'(x) = e^{-x} g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
6. **a.** Démontrer que la droite $T$ d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   **b.** Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $T$.

**Partie B**

1. Soit $H$ la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = (-x - 1)e^{-x}.$$

   Démontrer que $H$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h$ définie par $h(x) = xe^{-x}$.
2. On note $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $T$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathscr{D}$.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la suite de nombres complexes $(z_n)$ définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$z_{n+1} = (1 + \mathrm{i})z_n.$$

*Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.*

**Partie A**

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer $u_0$.
2. Démontrer que $(u_n)$ est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel $n$, exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.
5. Étant donné un réel positif $p$, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel $n$ telle que $u_n > p$.

   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier $n$.

| | | |
|---|---|---|
| **Variables** | : | $u$ est un réel<br>$p$ est un réel<br>$n$ est un entier |
| **Initialisation** | : | Affecter à $n$ la valeur 0<br>Affecter à $u$ la valeur 2 |
| **Entrée** | : | Demander la valeur de $p$ |
| **Traitement** | : | |
| **Sortie** | : | |

**Partie B**

1. Déterminer la forme algébrique de $z_1$
2. Déterminer module et arguments de $z_0$ et de $1+i$ .

   En déduire module et arguments de $z_1$ .
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$