Devoir commun de Mathématiques du troisième trimestre.
Premières S
Durée 2 heures. Calculatrice autorisée.

Attention !

- *Toute réponse doit être justifiée.*
- *La rédaction et la présentation du devoir seront prises en compte.*
- ***N'oubliez pas d'indiquer votre classe en plus de nom et prénom sur votre copie.***

EXERCICE 1 : (4 points) . Applications directes du cours.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I , J).

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point $A(-3;2)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}(-2;5)$.

b) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de diamètre [BD] , avec B(2 ; –7) et D(1 ; 3). On précisera les coordonnées de son centre et son rayon.

EXERCICE 2 : (8 points). Suites numériques.

Le but de l'exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0=900$ et pour tout entier naturel *n*,

$u_{n+1}=0{,}6\,u_n+200$. .

Les questions 1 et 2 sont indépendantes des questions suivantes.

1. Exécuter pas à pas l'algorithme ci-dessous et compléter le tableau. (Le reproduire sur la copie)

```
Code de l'algorithme
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 3
  u PREND_LA_VALEUR 900
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR 0.6*u+200
    AFFICHER u
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

n	3			
i	0			
u	900			

```
***Algorithme lancé***



***Algorithme terminé***
```

2. Quel est son rôle ? Donner les valeurs affichées, malencontreusement effacées (écran ci-dessus).

3. A l'aide de la calculatrice, émettre des conjectures sur le sens de variation de (u_n)

4 . On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel *n*, par $v_n=u_n-500$.

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,6 dont on donnera le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire que $u_n=400\times(0{,}6)^n+500$.

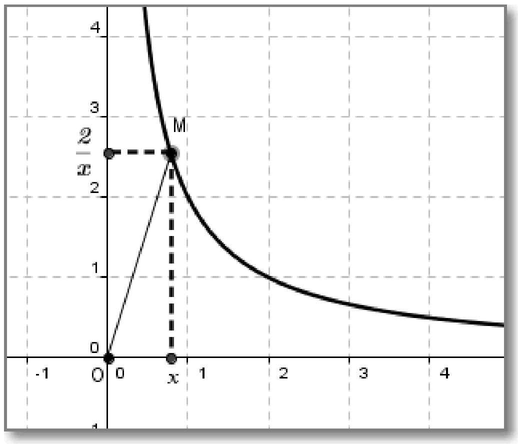
5. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

6. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $u_n>500$.

EXERCICE 3 AU CHOIX : (8 points). Étude d'un minimum.

Dans un repère orthonormé (O ; I , J), (H) est l'hyperbole

d'équation . $y=\frac{2}{x}$.



M est un point quelconque de (H) , d'abscisse x , $x>0$.

Problème : On cherche à déterminer la position du point M telle que la distance OM soit minimale.

1. On admet que « OM minimale » équivaut à « OM² minimale ».

Démontrer que : $OM^2=\frac{x^4+4}{x^2}$

2. On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^4+4}{x^2}$

a) Calculer la dérivée de *f* sur $]0;+\infty[$ et montrer que $f'(x)=\frac{2(x^2-2)(x^2+2)}{x^3}$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de *f*.

3. En déduire la réponse au problème posé et déterminer la distance minimale.

EXERCICE 3 AU CHOIX : (8 points). Probabilités.

Une roue de loterie se compose de plusieurs secteurs identiques : trois secteurs rouges, quatre secteurs blancs et *n* secteurs verts (avec $n \geqslant 1$).
Un joueur fait tourner la roue devant un repère fixe ; chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

- Si le secteur repéré est rouge, le joueur gagne 16 €.
- Si le secteur repéré est blanc , le joueur perd 12 €.
- Si le secteur repéré est vert, il lance une seconde fois la roue :
  - si le secteur repéré est rouge, il gagne 8 €.
  - s'il est blanc, il gagne 2 €.
  - s'il est vert, il ne gagne rien et ne perd rien.

Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.

1. Exprimer en fonction de *n*, le nombre total de secteurs.

2. Faire un arbre de probabilités qui schématise clairement l'expérience aléatoire.

3. Déterminer la loi de probabilité de X_n .

4. Montrer que l'espérance mathématique de X_n est $E(X_n)=\frac{32n}{(n+7)^2}$.

5. Déterminer la valeur de l'entier *n* pour laquelle l'espérance mathématique de X_n est maximale.

Quelle est cette valeur maximale de l'espérance ?