Lycée Jacques Prévert

Année scolaire 2010-2011

Devoir commun 1°S (3° trimestre) Durée : 2h Mardi 24 Mai 2011

Exercice 1 : (8 points)

M.Mathix vient de gagner au loto une belle somme d'argent. Il veut en faire profiter ses deux jeunes neveux Arnaud et Bertrand. Mais en bon mathématicien, il décide de compliquer un peu les choses. M.Mathix va approvisionner sur une durée de 14 ans deux comptes séparés A et B.

Compte A : C'est un compte à intérêts composés au taux annuel de 3%. C'est à dire que le capital va produire 3% d'intérêts venant se rajouter au capital.

Au 1er Janvier 2012, M. Mathix dépose sur ce compte 15 000 €. Au 1er Janvier de chaque année suivante, M.Mathix dépose 3000 € supplémentaires.

Compte B : Au 1er Janvier 2012, M. Mathix dépose 3 € . Au 1er Janvier de l'année suivante, 6 € sont déposés. Et ainsi de suite, en doublant chaque année. Ce compte ne produit aucun intérêt.

1°) **Étude du compte A** *:*

On appelle C_n le capital acquis au 1er Janvier de l'année (2012 + n). On note $C_0=15000$.

a) Calculer C_1 le capital acquis au bout d'un an.

b) Expliquer pourquoi $C_{n+1}=1{,}03\times C_n+3000$

c) On pose $V_n=C_n+100000$ Montrer que $V_{n+1}=1{,}03\,V_n$.

En déduire la nature de la suite (V_n) et préciser ses éléments caractéristiques.

d) Pour n entier naturel, exprimer V_n en fonction de n puis C_n en fonction de n.

e) A l'aide de votre calculatrice, indiquez au bout de combien d'années le capital dépassera les 50000 €. Justifier soigneusement.

f) Déterminer la limite de la suite (C_n).

2°) **Étude du compte B :**

On note u_n la somme déposée sur le compte B au 1er Janvier de l'année n. Ainsi $u_0=3$.

On pose $T_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ la somme totale déposée au bout de n années sur le compte B.

Exprimer T_n en fonction de n.

3°) Comparaison :

Arnaud choisit le compte A et Bertrand le compte B. Chacun récupérera le capital acquis sur le compte au 1er Janvier 2026. On suppose qu'ils seront alors tous les deux bien vivants.

Qui a fait le meilleur choix ?

Exercice 2 : (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Déterminer l'expression de sa dérivée $f'(x)$.

Étudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variations de f sur D_f.

3. Montrer que pour tout x $\in D_f$, $f(x)=x-1+\dfrac{4}{x-1}$ puis en déduire que la droite (D) d'équation $y=x-1$ est une asymptote à C_f.

4. Préciser la position de la courbe C_f par rapport à l'asymptote (D).

5. Compléter le tableau de la feuille annexe :

6. Dessiner dans un repère les points du tableau et les tangentes en ces points. Tracer les asymptotes puis donner l'allure de C_f.

7. On veut sans calculatrice donner une valeur approchée entière de $\frac{1000^2-2000+5}{999}$. Expliquer une démarche possible.

<u>Exercice 3 :</u> (6 points)

Sur la figure donnée sur la feuille annexe, ABC est un triangle du plan tel que : AB = 5 unités AC = 7 unités BC = 4 unités

On note I le barycentre des deux points pondérés (A;4) et (B;6) .

On appelle J le point du segment [AC] tel que AJ = 5 unités .

Le point K est défini par la relation vectorielle : $8\cdot\overrightarrow{BK} + 5\cdot\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

a) Placer le point I sur la figure de l'annexe. On indiquera le détail de la construction.

b) Trouver une relation entre $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ}$ .Démontrer que le point J est un barycentre pour les points pondérés A et C. On indiquera les coefficients de pondération de ces derniers.

c) Prouver que le point K est un barycentre pour les points pondérés B et C. On indiquera les coefficients de pondération de ces derniers. Placer le point K sur la figure.

Le point L est l'unique point du plan défini par la relation vectorielle : $2\cdot\overrightarrow{LA} + 3\cdot\overrightarrow{LB} + 5\cdot\overrightarrow{LC} = \vec{0}$

d) En utilisant la relation précédente, démontrer que le point L est un barycentre pour les points B et J. On précisera les coefficients de pondération de ces derniers.

e) Démontrer que le point L est le milieu du segment [IC].

f) Prouver que les trois droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes.

<u>Exercice 4 :</u> (8 points)

Vrai ou Faux. Justifier soigneusement.

1°) Si f est une fonction strictement décroissante sur [1 ; +∞ [alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2°) La somme de tous les entiers de 1 jusqu'à 1000 est égale à 500500.

3°) Si G vérifie la relation $(2m+1)\overrightarrow{GA}+m\,\overrightarrow{GB}-m\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

alors pour tout m réel G est le barycentre de (A,2m+1), (B,m) et (C,-m)

4°) Soit $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ un repère orthonormal du plan.

On considère A de coordonnées cartésiennes (1;1) dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$,

B de coordonnées polaires $\left(\sqrt{2}\,;\frac{3\pi}{4}\right)$ dans le repère $(O\,;\vec{i})$.

Le point I milieu du segment [AB] a pour coordonnées cartésiennes $(0\,;1)$

5°) Soit la fonction f définie sur [0 ; +∞ [par $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$.

La pente de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est -2.

6°) Soit (E) l'équation d'inconnue x : $x^2+mx+1=0$.

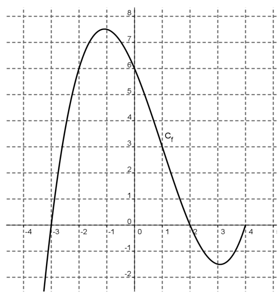
L'équation (E) admet exactement deux solutions pour $m>0$.

7°) On considère ci-contre

la courbe d'une fonction f

définie sur] -∞;4].

Pour tout x ∈]-3;2[, $f'(x)>0$.



FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

NOM :

<u>Exercice 2 :</u>

	A	B	C	D	E	F
x	-3	-1	0	2	3	5
$f(x)$						
$f'(x)$						

<u>Exercice 3 :</u>