TS Corrigé Bac blanc Janvier 2018

Ex 1 :

a) La dérivée de la fonction *f* définie par : $f(x) = e^x - x$ a pour expression : $f'(x) = e^x - 1$

Pour $x \geq 0$, $e^x \geq e^0$ (exp est croissante)

donc $e^x \geq 1$

C'est à dire $e^x - 1 \geq 0$ et *f* croissante sur [0 ; +∞[.

b) Comme en 0 elle vaut 1 et qu'elle ne fait que croître, pour x ≥ 0 alors $e^x - x \geq 1$ et $e^x \geq x + 1$.

c) Par conséquent, la fonction exponentielle est supérieure à la fonction affine x⟶ x+1 qui tend vers +∞ quand x tend vers +∞, d'après le théorème de comparaison : la limite de la fonction exponentielle en +∞ est +∞.

d) En posant $X = -x$, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$ car e^X tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$.

Ex 2 :

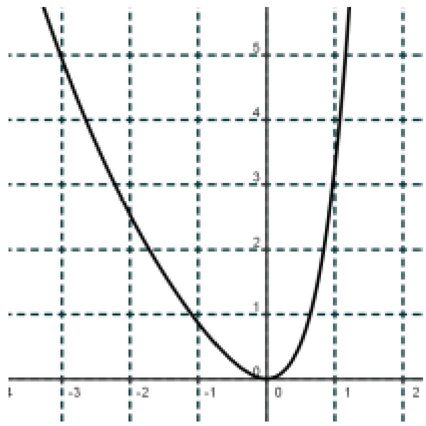
a) $\frac{z_1^2}{-z_2} = \frac{(2-3i)^2}{-1-i} = \frac{-5-12i}{-1-i} = \frac{(-5-12i)(-1+i)}{2} = \frac{17}{2} + \frac{7}{2}i$ la partie imaginaire est $\frac{7}{2}$ donc FAUX

b) $z_0 = i$

$z_1 = 1 - \frac{1}{i} = 1 + i$

$z_2 = 1 - \frac{1}{1+i} = 1 - \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

$z_3 = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{i}{2}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}-\frac{i}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 - (1-i) = i$ VRAI



Ex 3 :

Partie A :

D'après le graphique ci-contre, il semblerait que :

f soit décroissante sur] $-\infty$; 0] puis croissante sur [0 ; $+\infty$[

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Partie B :

$g(x) = (x+2)e^x + 1$

1°) $g'(x) = 1e^x + (x+2)e^x + 0 = (x+3)e^x$

$e^x > 0$ pour tout *x* réel donc $g'(x)$ est du signe de (x+3).

2°)

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Variation de *g*	↘	$g(-3)$	↗

$g(-3) = 1 - e^{-3} \approx 0{,}95$

3°) D'après le tableau de variation précédent, $g(-3)$ est le minimum de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$.

Comme ce minimum est strictement positif, pour tout *x* réel, $g(x) > 0$.

Partie C :

1°) $f'(x) = 2xe^x + x^{2e^x} + x = x(2e^x + xe^x + 1) = x[(x+2)e^x + 1] = xg(x)$

2°)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de x	-	0	+
Signe de $g(x)$	+		+
Signe de $f'(x)$	-	0	+

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variation de f	$\searrow$	0	$\nearrow$

3°)$f(x) = x^2e^x + \frac{x^2}{2} = x^2(e^x + \frac{1}{2})$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + \frac{1}{2}) = +\infty$ d'où par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ainsi par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Partie D :

Équation de T_1 tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 :

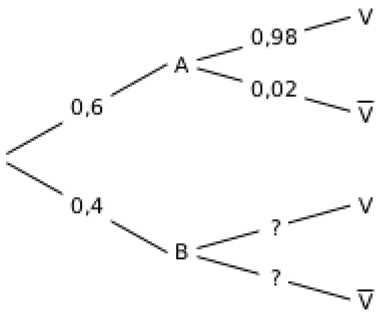
$y = f'(1)(x-1) + f(1) = (3e+1)(x-1) + e + \frac{1}{2} = (3e+1)x - 2\mathrm{e} - \frac{1}{2}$

T_1 coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; -2\mathrm{e} - \frac{1}{2})$

Exercice 4 :

Partie A

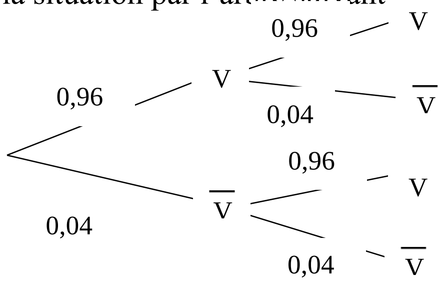
1)



2) $p(A\cap V) = p(A)\times p_A(V) = 0{,}6\times 0{,}98 = 0{,}588$
3) On a : $p(V) = p(A\cap V) + p(B\cap V)$
d'où $p(B\cap V) = p(V) - p(A\cap V) = 0{,}96 - 0{,}588 = 0{,}372$
d'où $p_B(V) = \frac{p(B\cap V)}{p(B)} = \frac{0{,}372}{0{,}4} = 0{,}93$
4) $p_{\overline{V}}(B) = \frac{p(B\cap\overline{V})}{p(\overline{V})} = \frac{p(B)-p(B\cap V)}{1-0{,}96} = \frac{0{,}4-0{,}372}{0{,}04} = 0{,}7$ Donc oui, il a raison.

Partie B :

On peut représenter la situation par l'arbre suivant :



D'après l'arbre on a : $p = 2\times 0{,}96\times 0{,}04 = 0{,}0768$

Exercice 5 :

Partie A

1. La population totale est constante et égale à 120 millions donc, pour tout entier naturel n, on peut dire que $u_n + v_n = 120$.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).
   Dans B3 on entre la formule `=0,9*B2+0,05*C2`.
   Dans C3 on entre la formule `=0,1*B2+0,95*C2`.
3. D'après les données du tableur, la suite (u_n) (donc le nombre de ruraux) semble décroitre et tendre vers 40 millions, et la suite (v_n) (donc le nombre de citadins) semble croitre et tendre vers 80 millions.

Partie B

1. **a.** Pour tout entier naturel n, notons P(n) la proposition : $40 \leq u_n \leq 90$.
   On a $u_0 = 90$, donc on a bien $40 \leq u_0 \leq 90$. P(0) est vraie.
   Pour un certain entier n, supposons P(n) vraie et montrons qu'alors P(n+1) est vraie.
   On a $40 \leq u_n \leq 90$ d'où $0{,}85 \times 40 \leq 0{,}85 \times u_n \leq 0{,}85 \times 90$
   d'où $34 + 6 \leq 0{,}85 \times u_n + 6 \leq 76{,}5 + 6$ d'où $40 \leq u_{n+1} \leq 82{,}5 \leq 90$.
   Donc P(n+1) est vraie et donc P est héréditaire.
   Ainsi P(0) est vraie et P est héréditaire, on en déduit donc par le principe de récurrence que P(n) est vraie pour tout entier naturel n.

   b. Quel que soit l'entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0{,}15 \times u_n + 6$. Or $40 \leq u_n \leq 90$
   d'où $-0{,}15 \times 40 \geq -0{,}15 \times u_n \geq -0{,}15 \times 90$ d'où $-6 + 6 \geq -0{,}15 \times u_n + 6 \geq -13{,}5 + 6$.

   Donc pour tout entier n, $0 \geq u_{n+1} - u_n$. Donc la suite (u_n) est décroissante.

   c. La suite (u_n) étant minorée par 40 et décroissante, on peut en conclure qu'elle converge.

2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$, donc $u_n = w_n + 40$.
   a.
   - $w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0{,}85u_n + 6 - 40 = 0{,}85(w_n + 40) - 34 = 0{,}85w_n + 34 - 34 = 0{,}85w_n$
   - $w_0 = u_0 - 40 = 90 - 40 = 50$

   Donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = 0{,}85$ et de premier terme $w_0 = 50$.

   b. D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout n : $w_n = w_0 \times q^n = 50 \times 0{,}85^n$
   Comme pour tout n, $u_n = w_n + 40$, on peut dire que $u_n = 50 \times 0{,}85^n + 40$

   c. Pour tout n, $\left.\begin{array}{l} u_n + v_n = 120 \\ u_n = 50 \times 0{,}85^n + 40 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_n = 80 - 50 \times 0{,}85^n$

3.
   - Pour tout n, $w_n = 50 \times 0{,}85^n$ donc $w_n > 0$
     $w_{n+1} = 0{,}85w_n < w_n$ et donc la suite (w_n) est décroissante.
     Comme pour tout n, $u_n = w_n + 40$, la suite (u_n) est décroissante.
   - (w_n) est géométrique de raison $0{,}85$; or $-1 < 0{,}85 < 1$ donc la suite (w_n) converge vers 0. Comme pour tout n, $u_n = w_n + 40$, la suite (u_n) converge vers 40.
   - Pour tout n, $v_n = 120 - u_n$ et la suite (u_n) est décroissante, donc la suite (v_n) est croissante.
   - La suite (u_n) est convergente vers 40 et, pour tout n, $v_n = 120 - u_n$, donc la suite (v_n) est convergente vers $120 - 40 = 80$.

4. **a**. La variable u est initialisée à 90, puis les différentes valeurs de u sont calculées par la formule : 0,85u+6, donc u représente les termes : u_n.
   On sort de la boucle « tant que » dès que u < 60, l'algorithme affiche donc la plus petite valeur n pour laquelle : $u_n < 60$. Ce qui correspond aussi à la plus petite valeur de n pour laquelle le nombre de ruraux est devenu inférieur au nombre de citadins.

b. D'après le tableur : $u_5 > 60$ et $u_6 < 60$. Donc la valeur affichée sera 6.

Ex 5 : (spécialité)
Partie A :

1°) a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Il semble que pour tout $n \geq 1$, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Par récurrence :
Initialisation :

Pour $n = 1$, $M^1 = M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \times a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Vrai pour $n = 1$.

Hérédité :

H) On suppose que pour un certain entier $n \geq 1$, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C) Montrons que $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (n+1)a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dem :

$M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a + na \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (n+1)a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cqfd

Conclusion :
La formule est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de n=1, elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

2°) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice nulle mais n'est pas inversible.
En effet, il est impossible de trouver B tel que $A \times B = I$.
On peut aussi remarquer que $detA = ad - bc = 0$
Donc FAUX.

Partie B :
1°) Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$

a) Si a est pair, il existe k entier tel que $a = 2k$
Ainsi, $a^2 + 9 = 2^n \Leftrightarrow 4k^2 + 9 = 2^n \Leftrightarrow 9 = 2^n - 4k^2 = 2(2^{n-1} - 2k^2)$ ce qui est impossible car 9 n'est pas un multiple de 2.
S'il existe, a ne pouvant pas être pair, il est donc impair.

b) On considère le tableau des restes en congruence modulo 4 :

a mod 4	0	1	2	3
a^2 mod 4	0	1	0	1
$a^2 + 9$ mod 4	1	2	1	2

Donc, $a^2 + 9$ n'est jamais divisible par 4.
Or, pour $n \geq 4$, $2^n = 2^2 \times 2^{n-2} = 4 \times 2^{n-2}$ est divisible par 4.

Donc, l'équation $a^2 + 9 = 2^n$ n'a pas de solution.

2°) Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5^n$où $a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) On suppose n impair, donc $n \geq 3$.
Sachant que $5 \equiv -1[3]$, on peut écrire $a^2 + 9 \equiv 5^n[3] \Leftrightarrow a^2 + 0 \equiv (-1)^n[3] \Leftrightarrow a^2 \equiv -1[3]$ car n impair.
C'est à dire $a^2 \equiv 2[3]$ le reste par la division par 3 est 2.

Or, si on considère le tableau des restes en congruence modulo 3 :

a mod 3	0	1	2
a^2 mod 3	0	1	1

On constate que le reste n'est jamais 2.

b) n pair, $n=2p$

$5^n - a^2 = (5^p)^2 - a^2 = (5^p - a)(5^p + a)$avec $5^p - a$entier inférieur strictement $5^p + a$($a \neq 0$)

Or, $9 = 1 \times 9 = 3 \times 3 = 9 \times 1$
La seule solution est donnée par$5^p - a = 1$ et $5^p + a = 9$
D'où $2a = 8$(par somme des 2 équations) et donc $a = 4$
Ainsi, $5^p = 5$, la seule solution est $p = 1$et donc $n = 2$.

Ainsi, $a^2 + 9 = 5^n$est vérifiée seulement pour$a = 4$ et $n = 2$.

L'unique solution de l'équation est donc 4.